Cours 3 24. 09. 25

La semaine passée, on a vu...

$a = \dot{v} = \ddot{r}$

→ 3 grandeurs cinématiques ($\bar{r}$, $\bar{v}$, $\bar{a}$) et ce qui les relie

→ Systèmes de coordonnées

* polaires
* curvilignes
* cylindriques

Cette semaine, on verra ...

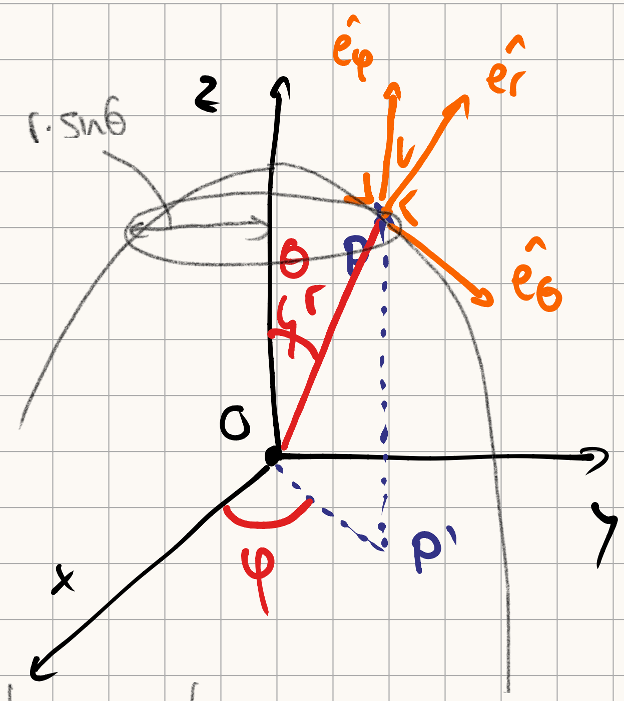
→ Système de coordonnées sphériques

→ Référentiels en déplacement "relatif"

5. Coordonnées sphériques

Un point dans l'espace est défini par :

* sa distance r au centre O
* un angle θ, complémentaire à la latitude
* un angle φ, similaire à la longitude



On y associe le repère mobile $(P, \hat{e_r}, \hat{e_\theta}, \hat{e_\varphi})$.

prolongement du rayon

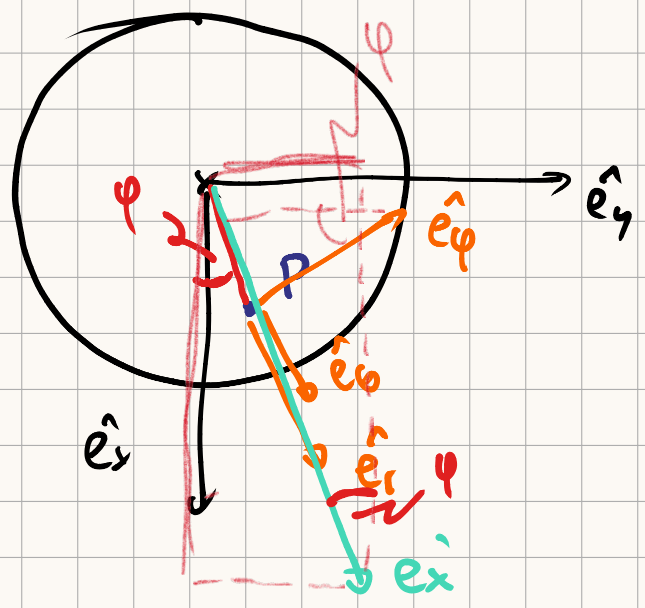
tangent au cercle de rayon $r.\sin\theta$

tangent au cercle vertical de rayon r.

Pour décrire entièrement l'espace : $r \in (0, R)$, $\theta \in (0, \pi)$, $\varphi \in (0, 2\pi)$.

On aimerait exprimer les vecteurs $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, e_φ dans le repère fixe $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$.

① Vue de dessus :

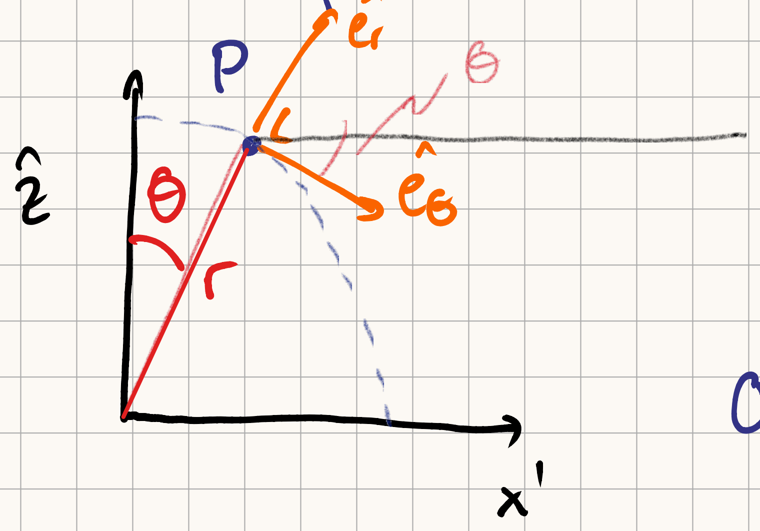


On aimerait utiliser le vecteur $\hat{e}_{x'}$:

(*) $\hat{e}_{x'} = \cos\varphi \cdot \hat{e}_x + \sin\varphi\, \hat{e}_y$

(**) $\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{e}_x + \cos\varphi\, \hat{e}_y$

② Vue de face



$$\hat{e}_r = \sin\theta\, \hat{e}_{x'} + \cos\theta\, \hat{e}_z$$

$$\hat{e}_\theta = \cos\theta\, \hat{e}_{x'} - \sin\theta\, \hat{e}_z$$

On remplace $\hat{e}_{x'}$ par son expression :

① $$\hat{e}_r = \sin\theta \left(\cos\varphi\, \hat{e}_x + \sin\varphi\, \hat{e}_y\right) + \cos\theta\, \hat{e}_z$$
$$= \sin\theta \cos\varphi\, \hat{e}_x + \sin\theta \sin\varphi\, \hat{e}_y + \cos\theta\, \hat{e}_z .$$

② $$\hat{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi\, \hat{e}_x + \cos\theta \sin\varphi\, \hat{e}_y - \sin\theta\, \hat{e}_z$$

③ $$\hat{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \hat{e}_x + \cos\varphi\, \hat{e}_y + 0\, \hat{e}_z$$

Quelle est leur évolution temporelle? Que vaut $\dfrac{d\hat{e}_i}{dt}$?

$$\dot{\hat{e}}_r = \frac{d}{dt}(\hat{e}_r) = \frac{d}{dt}\left(\sin\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y + \cos\theta\,\hat{e}_z\right)$$

$$\frac{d}{dt}\cos = -\sin$$

$$\frac{d}{dt}\sin = \cos$$

$$= \left(\dot\theta\cos\theta\cos\varphi + \sin\theta\cdot\dot\varphi\,(-\sin\varphi)\right)\hat{e}_x$$
$$+ \left(\dot\theta\cos\theta\sin\varphi + \dot\varphi\sin\theta\cos\varphi\right)\hat{e}_y$$
$$+ -\dot\theta\sin\theta\,\hat{e}_z$$

⚠ correction après cours.

$$= \dot\theta\,\overbrace{\left(\cos\theta\cos\varphi\,\hat{e}_x + \cos\theta\sin\varphi\,\hat{e}_y - \sin\theta\,\hat{e}_z\right)}^{\hat{e}_\theta}$$
$$+ \dot\varphi\sin\theta\,\underbrace{\left(-\sin\varphi\,\hat{e}_x + \cos\varphi\,\hat{e}_y\right)}_{\hat{e}_\varphi}$$

$$= \dot\theta\,\hat{e}_\theta + \dot\varphi\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$$

On arrive à :

$$\begin{cases} \dot{\hat{e}}_r = \dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\hat{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\varphi \\ \dot{\hat{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\hat{e}_\theta \end{cases}$$

On exprime nos grandeurs cinématiques en fonction de $\hat{e}_r$, $\hat{e}_\theta$, $\hat{e}_\varphi$.

→ position : $\vec{r} = r\cdot\hat{e}_r$

→ vitesse : $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(r\cdot\hat{e}_r) = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\cdot\dot{\hat{e}}_r = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\cdot\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta + r\cdot\dot{\varphi}\sin\theta\,\hat{e}_\varphi$

→ accélération : $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = a_r\cdot\hat{e}_r + a_\theta\,\hat{e}_\theta + a_\varphi\,\hat{e}_\varphi$

$$\begin{cases} a_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) \\ a_\theta = (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta) \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta \end{cases}$$

Note: On aurait pu dériver ces formules en utilisant les relations de Poisson.

Si $\bar{u}$ est un vecteur unitaire soumis à une rotation quelconque décrite par $\bar{\omega} = \bar{\omega}(t)$, alors son évolution est décrite par :

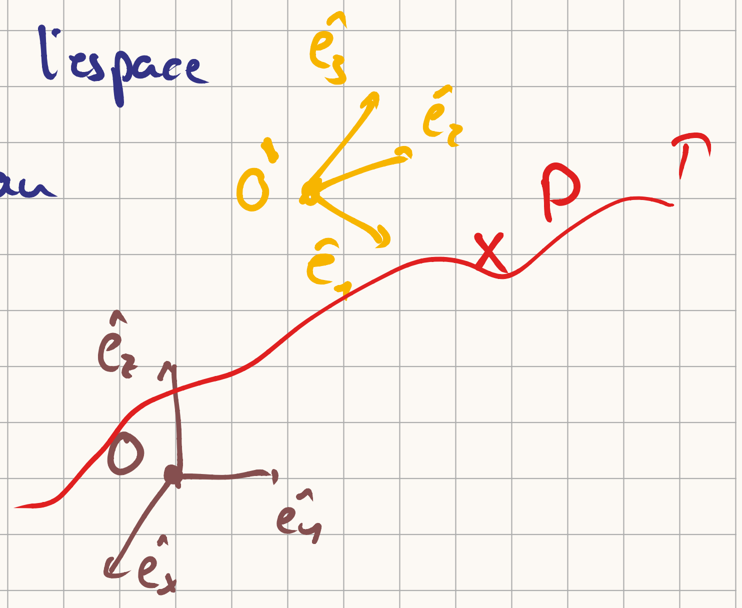
$$\frac{d\bar{u}}{dt} = \bar{\omega} \wedge \bar{u}.$$

En particulier :
$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \bar{\omega} \wedge \hat{e}_i$$

Mouvement relatif, référentiels en déplacement

On cherche à décrire le mouvement d'un PM dans l'espace

On considère un référentiel "absolu" $\mathcal{R}$ associé au repère $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$. Ce repère est fixe.



On considère également un référentiel "relatif" $\mathcal{R}'$ avec le repère $(O', \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

Les grandeurs cinématiques dans ces deux référentiels sont :

→ dans $\mathcal{R}$: $\vec{OP} = x \cdot \hat{e}_x + y\,\hat{e}_y + z\,\hat{e}_z$, $\vec{v}_{\mathcal{R}}(P) = \dot{x}\,\hat{e}_x + \dot{y}\,\hat{e}_y + \dot{z}\,\hat{e}_z$, $\vec{a}_{\mathcal{R}}(P) = \ddot{x}\,\hat{e}_x + \ddot{y}\,\hat{e}_y + \ddot{z}\,\hat{e}_z$

→ dans $\mathcal{R}'$: $\vec{O'P} = a_1\,\hat{e}_1 + a_2\,\hat{e}_2 + a_3\,\hat{e}_3$, $\vec{v}_{\mathcal{R}'}(P) = \dot{a}_1\,\hat{e}_1 + \dot{a}_2\,\hat{e}_2 + \dot{a}_3\,\hat{e}_3$, $\vec{a}_{\mathcal{R}'}(P) = \ddot{a}_1\,\hat{e}_1 + \ddot{a}_2\,\hat{e}_2 + \ddot{a}_3\,\hat{e}_3$

Question : comment relier ces grandeurs entre elles ?

On remarque que le mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ est entièrement décrit par deux vecteurs:

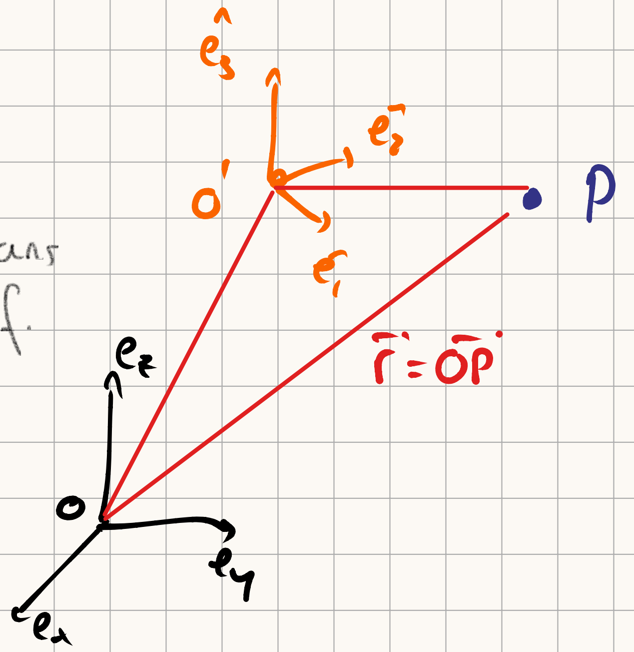
① $\vec{v}_{\mathcal{R}}(O')$ la vitesse de O' dans $\mathcal{R}$ le réf. absolu

② $\vec{\omega}$ le vecteur de rotation du repère $(O', \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

L'évolution temporelle de ces vecteurs de base est donnée par les relations de Poisson:

$$\frac{d\hat{e}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i .$$

La position: $\vec{r} = \vec{OP} = \underbrace{\vec{OO'}}_{\text{position du repère relatif par rapport au repère absolu}} + \underbrace{\vec{O'P}}_{\text{position du PM dans le référentiel relatif.}}$



La vitesse : $\vec{V}_{\mathcal{R}}(P) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OP}) = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OO'}) + \frac{d}{dt}(\overrightarrow{O'P})$

$$= \vec{V}_{\mathcal{R}}(O') + \frac{d}{dt}\left(a_1\hat{e}_1 + a_2\hat{e}_2 + a_3\hat{e}_3\right)$$

$$= \vec{V}_{\mathcal{R}}(O') + \underbrace{\dot{a}_1\hat{e}_1 + \dot{a}_2 e_2 + \dot{a}_3 e_3}_{\text{vitesse de P selon } \mathcal{R}'} + a_1\dot{\hat{e}}_1 + a_2\dot{\hat{e}}_2 + a_3\dot{\hat{e}}_3$$

$$= \vec{V}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{V}_{\mathcal{R}'}(P) + a_1\dot{\hat{e}}_1 + a_2\dot{\hat{e}}_2 + a_3\dot{\hat{e}}_3$$

$$= \vec{V}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{V}_{\mathcal{R}'}(P) + a_1\cdot\vec{\omega}\wedge\hat{e}_1 + a_2\,\vec{\omega}\wedge\hat{e}_2 + a_3\,\vec{\omega}\wedge\hat{e}_3$$

$$= \vec{V}_{\mathcal{R}}(O') + \vec{V}_{\mathcal{R}'}(P) + \vec{\omega}\wedge\Big(\underbrace{a_1\cdot\hat{e}_1 + a_2\cdot\hat{e}_2 + a_3\cdot\hat{e}_3}_{\text{position de P dans le réf. relatif}}\Big)$$

$$\vec{V}_{\mathcal{R}}(P) = \underbrace{\vec{V}_{\mathcal{R}}(O')}_{\text{translation de } \mathcal{R}'} + \underbrace{\vec{V}_{\mathcal{R}'}(P)}_{\text{vitesse relative de P dans } \mathcal{R}} + \underbrace{\vec{\omega}\wedge\overrightarrow{O'P}}_{\text{rotation de } \mathcal{R}'.}$$