Résolution d'équations différentielles du premier ordre

Une équation différentielle du premier ordre est une équation qui relie une fonction inconnue $y(t)$ à sa dérivée première $\frac{dy}{dt}$.

Ce type d'équations apparait très souvent en physique. On peut citer

- → la chute libre avec frottements
- → la décomposition radioactive
- → les circuits électriques
- → les transferts de température...

Une méthode formelle de résolution vous sera présentée en Analyse II. Voici un petit teaser...

1. ED homogène (sans terme constant)

L'équation est de la forme $\dot{x} = -\lambda x$. Pour la résoudre précisément, il faut connaître une condition initiale $x(t=0) = x_0$.

On utilise la méthode de séparation des variables.. on met tous les termes dépendant de "la fonction" d'un côté, et les termes qui dépendent de la variable de l'autre.

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda x \Rightarrow \frac{1}{x} dx = -\lambda dt$$

On intègre. Pour simplifier, la constante d'intégration n'apparaît que d'un côté.

$$\ln(x) = -\lambda t + c$$

$$\xRightarrow{\exp(\ldots)} \quad x(t) = e^{-\lambda t + c} = e^{-\lambda t} \cdot e^{c} = K \cdot e^{-\lambda t}$$

On a donc $x(t) = K e^{-\lambda t}$, où $K = e^{c}$ est une constante.
Pour trouver sa valeur, on utilise la condition initiale $x(0) = x_0$.

A $t=0$, $x(0) = x_0$

$$\Rightarrow \quad x(0) = K \cdot e^{0} = K = x_0$$

Finalement, $$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\lambda t}}$$

2. ED non-homogène (avec terme constant)

On rajoute un terme constant à cette équation. Pensez au problème de chute libre avec frottements !

L'équation prend la forme $\dot{x} = -\lambda x + g$. De plus, on aura besoin de la condition initiale $x(t=0) = x_0$.

Il existe (au moins) deux manières de résoudre cette équation. La première (A) est plutôt traditionnelle, la deuxième (B) est plus innovante et ne fait pas appel à la notion d'équation différentielle.

(A) Méthode classique.

On résoud cette ED en deux étapes:

A1: Partie homogène

On s'occupe d'abord de la résolution de la partie homogène, c'est-à-dire sans constante, $\dot{x} = -\lambda x$.
On trouve alors une solution particulière au problème qu'on notera x_{hom}.

On utilise pour ceci la méthode de séparation des variables pour obtenir $x_{hom} = K \cdot e^{-\lambda t}$.
La constante est volontairement laissée telle quelle.

A2: Solution particulière, "variation de la constante"

L'idée est de se dire que si l'équation homogène donne la bonne forme générale de la fonction, peut-être qu'elle forme un bon point de départ pour la solution générale.

On considère alors que la constante n'est plus si constante que ça, et on l'autorise à varier pour "absorber" le terme non homogène g.

Ainsi: $x(t) = k(t) \cdot e^{-\lambda t}$, et $\dot{x}(t) = \dfrac{dx}{dt} = \dot{k}(t) e^{-\lambda t} + k(t)(-\lambda) e^{-\lambda t}$.

On peut injecter ces expression dans notre ED $\dot{x} = -\lambda x + g$

$$\dot{k} e^{-\lambda t} - \cancel{\lambda k e^{-\lambda t}} = -\cancel{\lambda k e^{-\lambda t}} + g$$

$$\Rightarrow \quad \dot{k} e^{-\lambda t} = g$$

$$\Rightarrow \quad \dot{k} = g \cdot e^{\lambda t}$$

On fait face à une dérivée totale qu'on peut intégrer :

$$k(t) = g \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot e^{\lambda t} + A$$

Ainsi, $x(t) = k(t) e^{-\lambda t} = \left[g \cdot \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t} + A \right] e^{-\lambda t}$

$$= \frac{g}{\lambda} + A e^{-\lambda t}$$

Finalement, on trouve la valeur de A à l'aide de la condition initiale $x(0) = x_0$.

$$x(0) = \frac{g}{\lambda} + A e^{0} = \frac{g}{\lambda} + A = x_0 \Rightarrow A = x_0 - \frac{g}{\lambda}$$

Donc

$$x(t) = \frac{g}{\lambda} + \left(x_0 - \frac{g}{\lambda}\right) e^{-\lambda t} = \frac{g}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] + x_0 e^{-\lambda t}$$

... on remarque que si $x_0 = 0$, on retombe sur l'expression de la vitesse d'un corps en chute libre avec frottements.

(B) : Méthode du facteur intégrant

On aimerait transformer ce problème en un "simple" problème d'intégration à l'aide d'un petit truc mathématique.

En partant de

$$\dot{x} + \lambda x = g$$

on aimerait faire en sorte que le terme de gauche soit la dérivée d'un produit de fonctions, en le multipliant par une fonction $\mu(t)$

$$\Rightarrow \mu(t) \cdot \dot{x}(t) + \lambda \cdot x(t)\, \mu(t) = \frac{d}{dt}\left[\mu(t) \cdot x(t)\right] \qquad (*)$$

Or, $\frac{d}{dt}\left[\mu(t) x(t)\right] = \dot{\mu}(t)\, x(t) + \mu(t)\, \dot{x}(t)$ qu'on compare avec $(*)$.

Les deux équations sont égales si $\dot{\mu}(t) = \lambda \mu(t)$.

Ainsi (séparation des variables), $\mu(t) = e^{\lambda t}$.

On peut donc reprendre notre problème initial modifié :

$$\underbrace{e^{\lambda t} \cdot \dot{x}(t) + e^{\lambda t} \lambda x(t)}_{(u \cdot v)'} = e^{\lambda t} \cdot g$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t} \cdot x(t)\right) = e^{\lambda t} \cdot g$$

Or, on peut maintenant intégrer cette expression.

$$\Rightarrow e^{\lambda t} x(t) = \frac{g}{\lambda} e^{\lambda t} + B$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{g}{\lambda} + B e^{-\lambda t}$$

. On retrouve le résultat précédent !!!