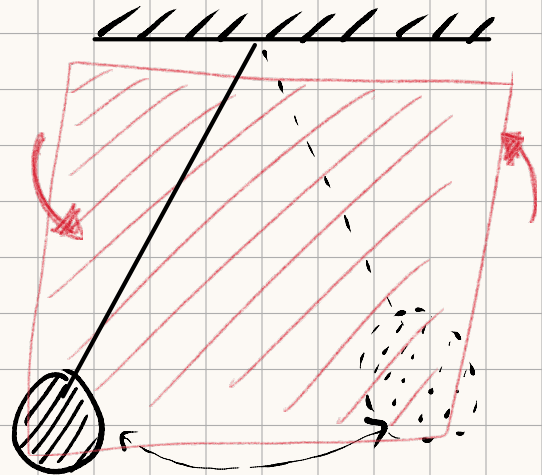


$l = 67 \text{ m}$

$m = 28 \text{ kg}$

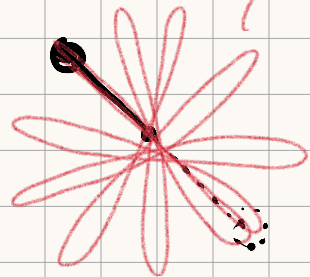
Panthéon de Paris, 1851.

Pendule de Foucault

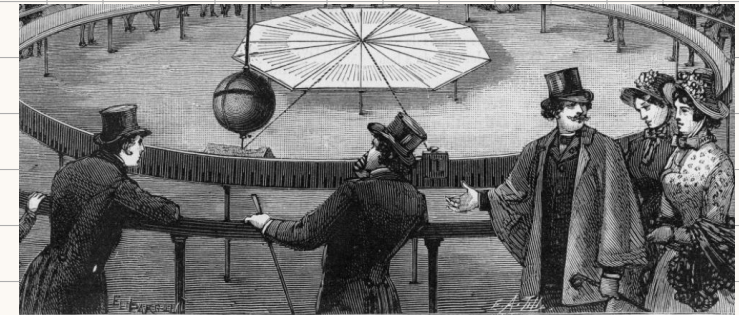


VUE DE FACE

rotation du plan d'oscillation.



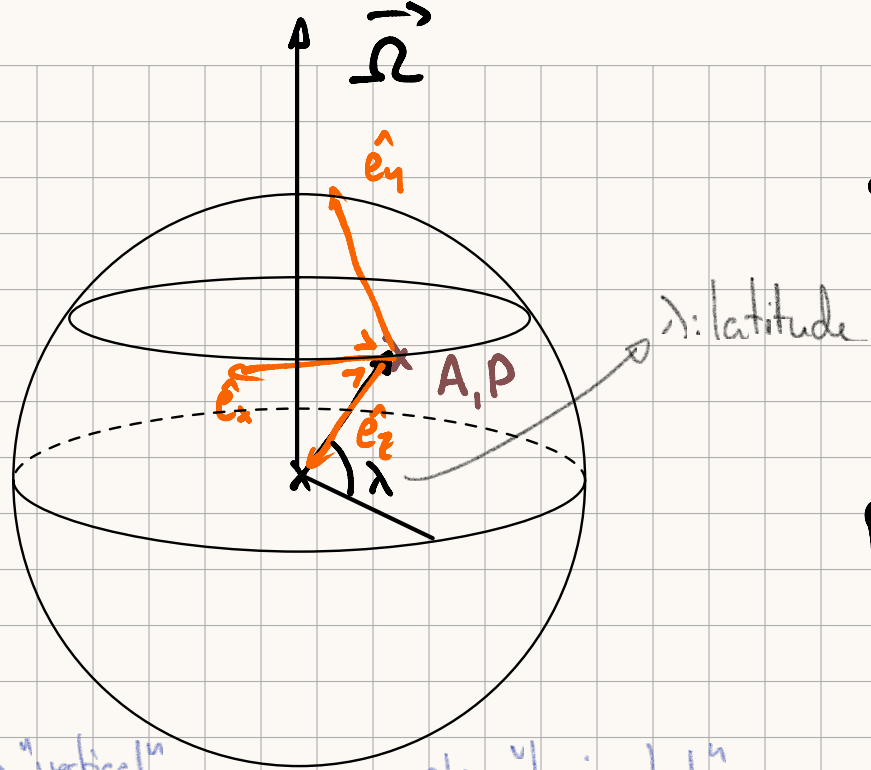
VUE DE HAUT



L'expérience du pendule de Léon Foucault au Panthéon de Paris, en 1851.



Le plan des oscillations du pendule tourne
=> Illustration de la rotation de la Terre!



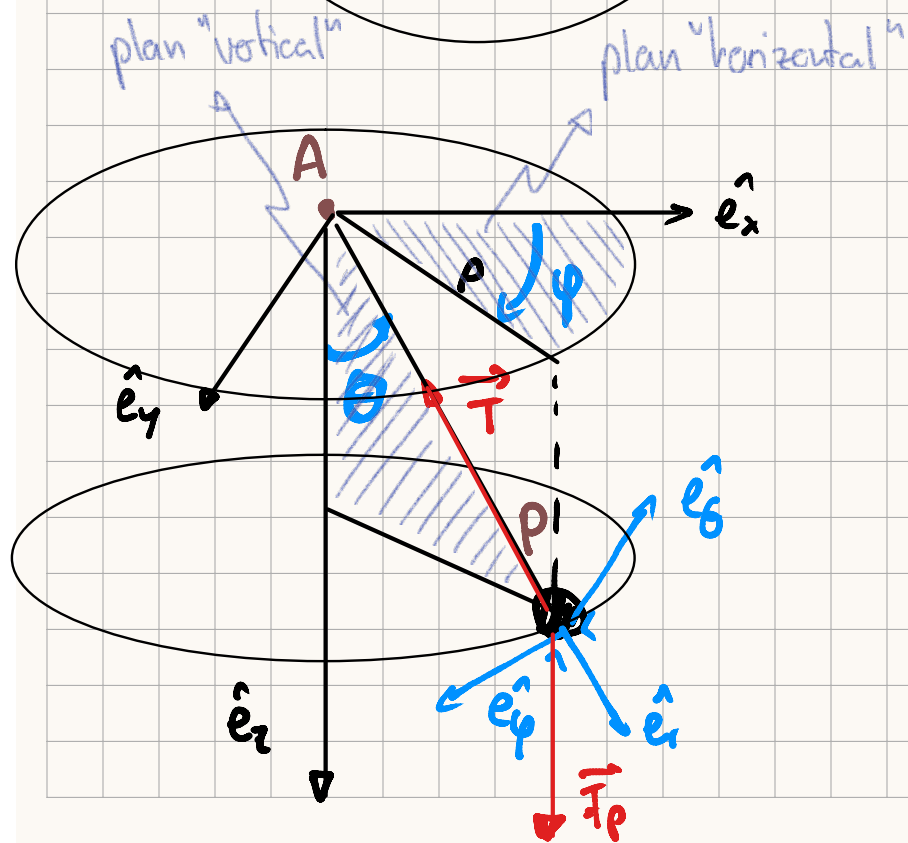
Systeme : pendule, formé d'une masse P
attachée en A.

Réf. absolu : système solaire

Réf. relatif : Terre en rotation Ω

ouest
nord
centre

↳ repère cartésien $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$
↳ repère sphérique $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$.



Forces (réelles) : Poids $\vec{F}_p = m \cdot \vec{g} = mg \hat{e}_z$

Tension du fil $\vec{T} = -T \cdot \hat{e}_r$

On veut exprimer $\vec{a}_{R'}(P)$ et $\vec{v}_{R'}(P)$. On utilise les coordonnées sphériques

$$\vec{v}_{R'}(P) = \dot{r} \hat{e}_r + r \dot{\theta} \hat{e}_\theta + r \dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

Or $r = AP = \text{cte} = P \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$. De plus, θ petit $\Rightarrow \sin \theta \sim \theta$ et $\cos \theta \sim 1$

Ainsi $\vec{v}_{R'}(P) \approx P \cdot \dot{\theta} \hat{e}_\theta + P \cdot \dot{\varphi} \theta \hat{e}_\varphi$. Or, $\dot{\varphi}$ est faible $\Rightarrow \dot{\varphi} \cdot \theta$ est "très très" faible

$$\vec{v}_{R'}(P) \approx P \cdot \dot{\theta} \hat{e}_\theta$$

L'accélération vaut: $\vec{a}_{R'}(P) = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) \hat{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta) \hat{e}_\theta$
 $+ (r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2 r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + 2 \dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta) \hat{e}_\varphi$

En négligeant tous les termes du deuxième ordre θ^2 , $\dot{\varphi}^2$, $\theta \dot{\varphi}$, on a:

$$\vec{a}_{R'}(P) \approx -P \dot{\theta}^2 \hat{e}_r + P \ddot{\theta} \hat{e}_\theta + 2P \dot{\varphi} \dot{\theta} \hat{e}_\varphi$$

On veut relier $\bar{a}_R(P)$ avec $\bar{a}_{R'}(P)$. On sait que

$$\bar{a}_R(P) = \bar{a}_{R'}(P) + \bar{a}_R(A) + \cancel{\dot{\Omega} \wedge \overline{AP}} + \cancel{\dot{\Omega} \wedge (\dot{\Omega} \wedge \overline{AP})} + 2 \dot{\Omega} \wedge \overline{v_{R'}(P)}$$

MCU \Rightarrow orientée vers
le centre.

$$\bar{a}_R(A) = \dot{\Omega} \wedge (\dot{\Omega} \wedge \overline{R_T})$$

Il s'agit d'une correction à
 \bar{g} (voir exemple oscureux)

\Rightarrow on néglige

centrifuge: on néglige

$$\bar{a}_R(P) = \bar{a}_{R'}(P) + 2 \dot{\Omega} \wedge \overline{v_{R'}(P)}$$

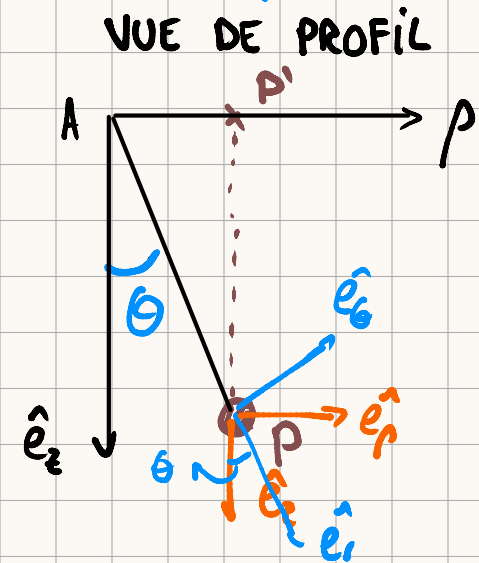
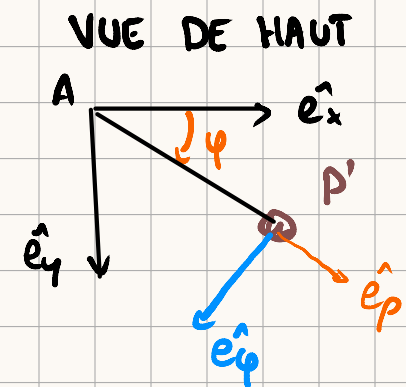
On veut exprimer $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ en fonction de $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$.

On a (croquez moi sup..):

$$\begin{cases} \hat{e}_r = \sin\theta \cos\varphi \hat{e}_x + \sin\theta \sin\varphi \hat{e}_y + \cos\theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta = \cos\theta \cos\varphi \hat{e}_x + \cos\theta \sin\varphi \hat{e}_y - \sin\theta \hat{e}_z \\ \hat{e}_\varphi = -\sin\varphi \hat{e}_x + \cos\varphi \hat{e}_y \end{cases}$$

En utilisant l'approximation $\sin\theta \approx 0$, $\cos\theta \approx 1$:

$$\begin{cases} \hat{e}_r \approx \hat{e}_z \\ \hat{e}_\theta \approx \cos\varphi \hat{e}_x + \sin\varphi \hat{e}_y \\ \hat{e}_\varphi \approx -\sin\varphi \hat{e}_x + \cos\varphi \hat{e}_y \end{cases}$$



Pour calculer le terme de Coriolis, il faut exprimer $\vec{\Omega}$ dans $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\varphi)$.

$$\begin{aligned}\vec{\Omega} &= \Omega \cos \lambda \hat{e}_\varphi - \Omega \sin \lambda \hat{e}_z \\ &\approx \Omega \cos \lambda [\sin \varphi \hat{e}_\theta + \cos \varphi \hat{e}_\varphi] - \Omega \sin \lambda \hat{e}_r \\ &\approx \Omega [-\sin \lambda \hat{e}_r + \cos \lambda \sin \varphi \hat{e}_\theta + \cos \lambda \cos \varphi \hat{e}_\varphi]\end{aligned}$$



On peut appliquer notre 2^e loi de Newton dans le référentiel absolu:

$$\begin{aligned}m \cdot \vec{a}_{R'}(P) &= \sum \vec{F} - m \cdot 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) \\ &= \vec{F}_p + \vec{T} - 2m \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_{R'}(P) \\ &= mg \hat{e}_r - mg \sin \theta + T \hat{e}_r + \underbrace{2m \Omega R \dot{\theta}}_{\text{Coriolis}} (\sin \lambda \hat{e}_\varphi + \cos \lambda \cos \varphi \hat{e}_r)\end{aligned}$$

On a donc 3 équations du mouvement:

$$\text{selon } \hat{e}_r : -mP\ddot{\theta} = mg - T + 2m\Omega P\dot{\theta} \cos\lambda \cos\varphi$$

$$\text{selon } \hat{e}_\theta : mP\ddot{\theta} = -mg\theta$$

$$\text{selon } \hat{e}_\varphi : 2mP\dot{\varphi}\dot{\theta} = 2m\Omega P\dot{\theta} \sin\lambda$$

On s'intéresse à la variation du plan de rotation donnée par \hat{e}_φ .

$\Rightarrow \dot{\varphi} = \Omega \sin\lambda$ est la vitesse angulaire de rotation du plan!!

La période de rotation vaut donc $T = \frac{2\pi}{\Omega \sin\lambda}$.

- Aux pôles, $\lambda = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow \dot{\varphi} = 0$
- A l'équateur, $\lambda = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \Omega$ et $T_{\text{eq}} = 24\text{h}$
- A Lausanne, $\lambda = 0.8 \Rightarrow \dot{\varphi} \approx 10.8 \text{ deg/h}$ et $T \approx 33\text{h}$