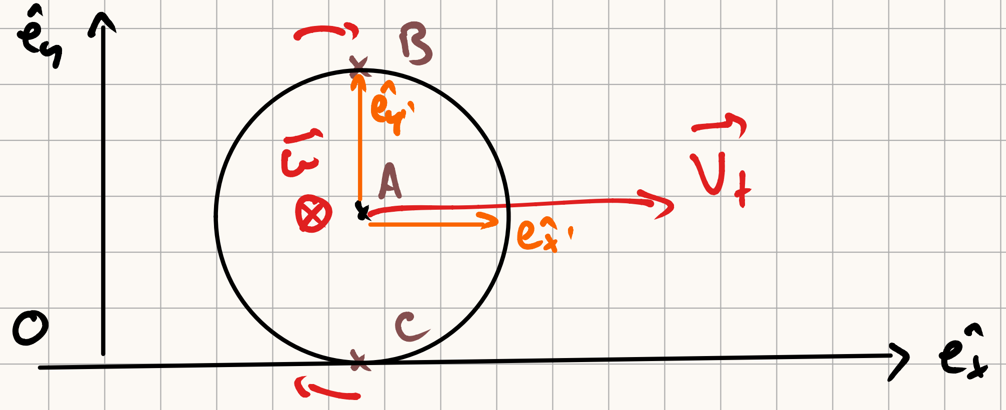
Roulement sans glissement

On considère une roue en rotation $\vec{\omega}$ constante et en translation $\vec{V_t}$.

On se place dans le référentiel du laboratoire $(O, \hat{e_x}, \hat{e_y})$



Pour avoir un roulement sans glissement, il faut que la vitesse de C par rapport au sol soit nulle $\vec{V_R}(C) = \vec{0}$.

On considère également le référentiel relatif en translation associé à $(A, \hat{e}_{x'}, \hat{e}_{y'})$

La vitesse vaut :

$$\underbrace{\vec{v}_R(C)}_{=0} = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(C) + \cancel{\vec{\omega}' \wedge \vec{AC}}^{=0}$$

, où $\vec{\omega}'$ est la vitesse angulaire du référentiel.

$$\Rightarrow \vec{v}_R(C) = \vec{v}_R(A) + \vec{v}_{R'}(C)$$
$$= \vec{v}_t + \vec{v}_{R'}(C) = \vec{0}$$

Or, le point C forme un MCU autour de A. $\vec{v} = \vec{\omega} \wedge \vec{AC} = \omega . R(-\hat{e}_x)$.

Ainsi :

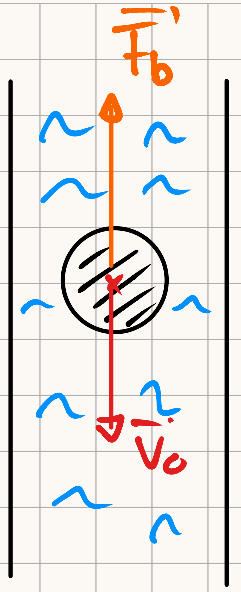
$$\vec{v}_t = -\vec{v}_{R'}(C) \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_t = \omega R}$$

Il s'agit de la condition de roulement sans glissement.

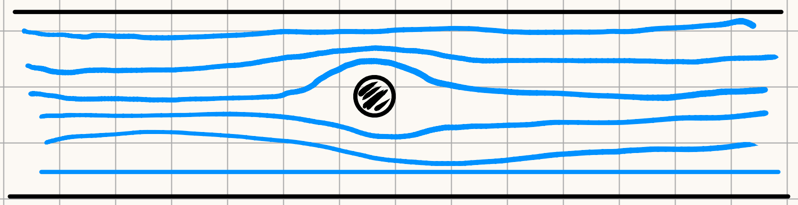
Remarque : Si la roue glisse, la présence de frottements dynamiques va freiner le point de contact jusqu'à atteindre un état de roulement sans glissement.

Frottements visqueux (fluides)

Lorsqu'un objet se déplace dans un milieu visqueux/fluide (parfaitement déformable), il y a l'existence d'une force qui s'oppose au mouvement. On parle de frottements visqueux $\vec{F}_b$.



① A faible vitesse (régime laminaire) :



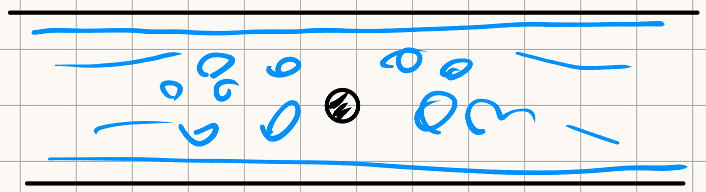
On modélise la force comme

$$\vec{F}_b = -b_l \cdot \vec{v} \quad , \text{ où } \quad b_l = k \cdot \eta$$

est le coefficient laminaire, et k est un facteur de forme, η la viscosité.

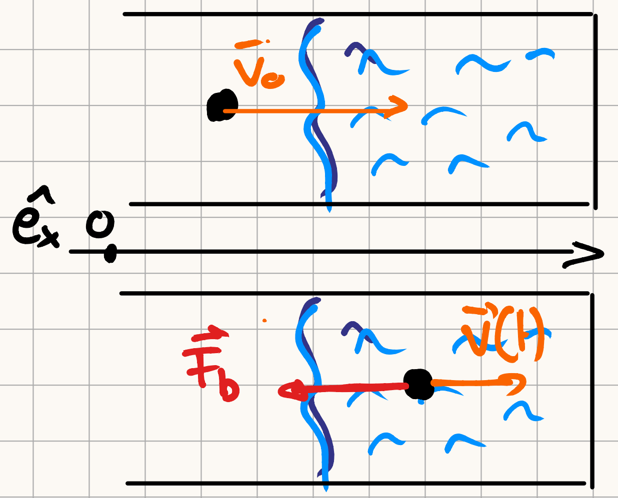
② A plus grande vitesse (régime turbulent) : On modélise la force comme

$$\vec{F}_b = -b_t \cdot v^2 \, \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = -b_t \cdot v^2 \cdot \hat{e}_\tau \, .$$



Application : mouvement horizontal

On considère un objet non soumis à la pesanteur qui rentre dans un fluide avec une vitesse $\vec{v_0}$.



Que vaut $\vec{v}(t)$?

$$\sum \vec{F} = \vec{F_b} = -b\cdot\vec{v} = -b\cdot v\cdot\hat{e}_x$$

Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ $\Rightarrow$ $-b\cdot v_x = m\cdot a_x$

$$\Rightarrow \boxed{-b\cdot v = m\cdot\dot{v}}$$

Cette équation fait intervenir une fonction et sa dérivée. Il s'agit d'une équation différentielle du 1er ordre.

$$\dot{v} = -\frac{b}{m} \cdot v \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m} \cdot v \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{v} \cdot dv = \int -\frac{b}{m} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \ln(v) = -\overbrace{\frac{b}{m}}^{\lambda} \cdot t + c_1 = -\lambda t + c_1 \quad \Big| \exp(..)$$

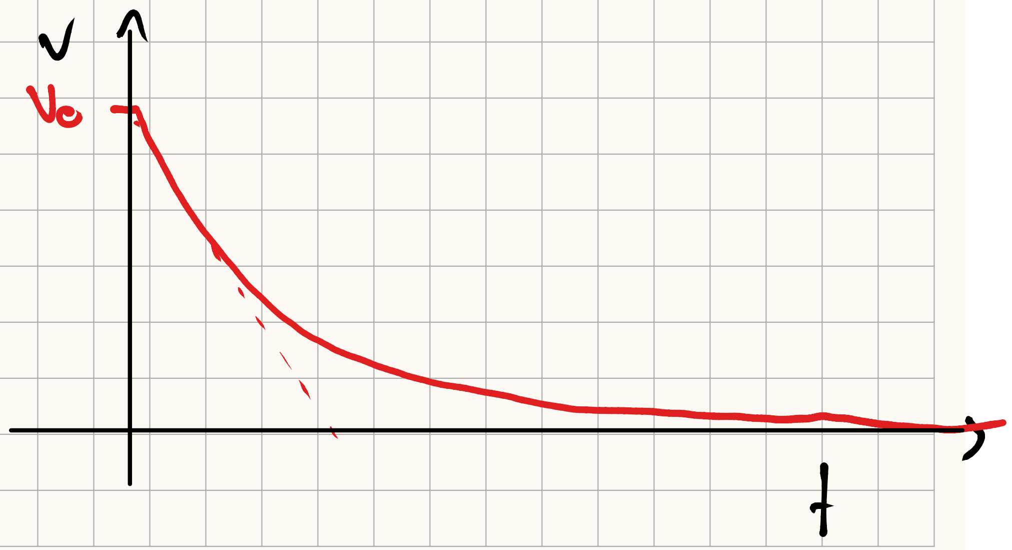
$$\Rightarrow v(t) = e^{-\lambda t + c_1} = e^{c_1} \cdot e^{-\lambda t} \equiv k\, e^{-\lambda t}$$

Pour trouver k, on utilise la condition : à $t=0$, $v(0) = v_0$.

$$v(t=0) = k \cdot e^{0} = k = v_0$$

Ainsi : $\boxed{v(t) = v_0 \cdot e^{-\lambda t}}$

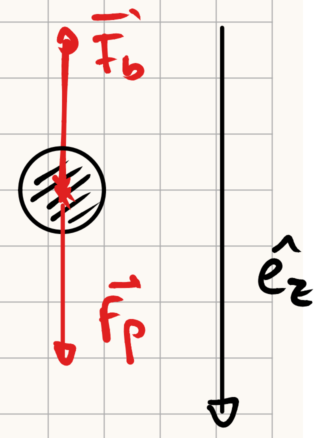
$$v(t) \xrightarrow{t \to \infty} 0$$



Application : chute libre

On laisse tomber ($v_0 = 0$) une balle dans un milieu visqueux (air).

Comment évolue sa vitesse ?



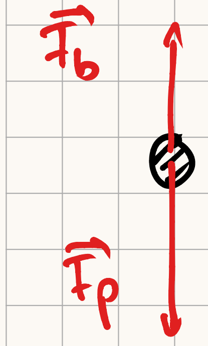
$$\sum \vec{F} = \vec{F_p} + \vec{F_b} = mg\cdot\hat{e}_z - b\cdot v\,\hat{e}_z \overset{2LN}{=} m\cdot a_z$$

$$\Rightarrow \boxed{mg - bv = m\dot{v}}$$

$$\Rightarrow \quad \dot{v} = -\lambda v + g \quad , \text{ où } \lambda = \frac{b}{m}.$$

Observations : → comme avant, la vitesse varie de manière exponentielle "au début".

→ au bout d'un certain temps, la force de frottement compensera exactement la force de pesanteur, et la bille atteint une vitesse maximale limite v_{lim}.



On propose une solution de la forme $v(t) = A + B e^{-\lambda t}$.

① Que vaut A ? Si $t \longrightarrow \infty$, $v(t) \longrightarrow v_{lim}$

Si $v = \text{cste} \Rightarrow \sum \vec{F} = \vec{0}$. Ainsi $mg = b \cdot v_{lim} \Rightarrow v_{lim} = \frac{mg}{b} = \frac{g}{\lambda}$.

$$v(t) \xrightarrow{t \to \infty} A = v_{lim} = \frac{g}{\lambda}$$

Alors $v(t) = v_{lim} + B e^{-\lambda t}$

② Que vaut B ? Si $t=0$, alors $v(0)=0$. $v(t=0) = V_{lim} + B \cdot e^0$

$$= V_{lim} + B$$

$$= 0$$

Ainsi, $B = -V_{lim} = -\frac{g}{\lambda}$.

Finalement, $v(t) = \frac{g}{\lambda} + \left(-\frac{g}{\lambda}\right)e^{-\lambda t} = \frac{g}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right]$.

On vérifie que la solution est bonne : $\dot{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{g}{\lambda}\left[- e^{-\lambda}\right](-\lambda) = g \cdot e^{-\lambda t}$

On injecte dans "Newton" ici :

$$g \cdot e^{-\lambda t} = -\lambda \frac{g}{\lambda}\left[1 - e^{-\lambda t}\right] + g = \cancel{-g} + \cancel{g} + g \cdot e^{-\lambda t}$$

$\Rightarrow g e^{-\lambda t} = g e^{-\lambda t}$, ce qui justifie mon choix de solution $A + B e^{-\lambda t}$.