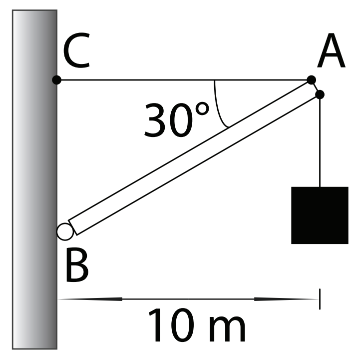
Exercices

Exercice 1 *Ambiance tendue au bistrot*

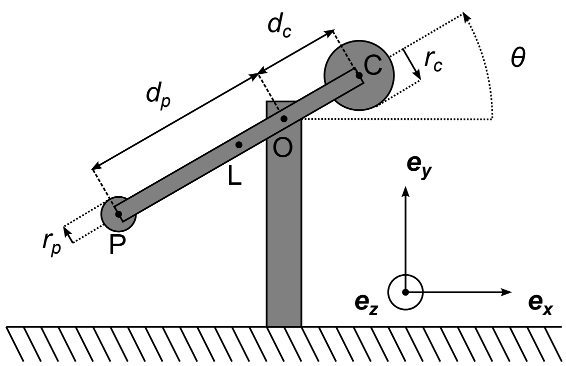
Une enseigne de bistro est accrochée comme montré sur le schéma ci-contre. Une poutre d'épaisseur nulle et de longueur AB est libre de pivoter autour de B. Un câble relie les points C, A et l'enseigne et les stabilise. Les câbles sont de masse négligeables et la masse de la poutre et de l'enseigne sont 15 kg et 300 kg respectivement.

Trouvez les forces $\vec{F}_B$ et $\vec{F}_C$ agissant sur B et C respectivement.



Exercice 2 *Être catapulté au centre du problème*

On se propose d'étudier la dynamique de la catapulte représentée sur la figure ci-dessous.



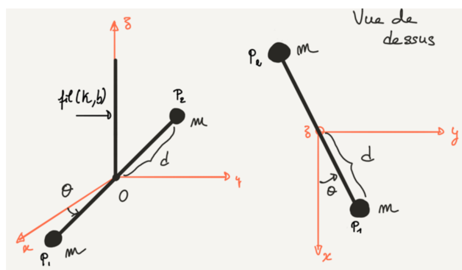
La catapulte est constituée d'un levier assimilé à une tige mince homogène de masse m_l fixé à un support au point O. Le projectile est une boule pleine de masse m_p et de rayon r_p fixée à l'extrémité P du levier à une distance d_p de l'axe de rotation. Une boule pleine de masse m_c et de rayon r_c placée à l'autre extrémité C à une distance d_c de l'axe de rotation sert de contre-poids permettant d'actionner la catapulte. L'angle θ est défini comme étant l'angle entre l'horizontale $\hat{e}_x$ et le vecteur $\overrightarrow{OC}$. On suppose qu'un mécanisme permet d'éjecter le projectile quand l'angle θ_e atteint la valeur désirée.

1. Placer sur la figure les forces agissant sur la catapulte.
2. Calculer les moments d'inertie par rapport à l'axe de rotation pour le projectile (I_O^p), le contre-poids (I_O^c) et le levier (I_O^l) ? En déduire le moment d'inertie global I_O du système projectile+contre-poids+levier.

3. Quelle condition doit-on avoir entre m_c, d_p, m_p, d_c et m_l pour faire fonctionner la catapulte ?
4. Donner l'équation différentielle sur $\theta(t)$ qui permet de décrire le mouvement de la catapulte en utilisant le moment d'inertie global I_O du système.
5. Donner la vitesse du projectile en fonction de l'angle d'éjection, sachant que l'angle initiale $\theta(t=0)=\theta_0$ et que la vitesse angulaire initiale est nulle.

Exercice 3 *Balance ton Cavendish. Examen 2019*
La balance de Cavendish est un instrument permettant de déterminer expérimentalement la constante de gravitation G. Elle est constituée de deux points matériels P_1 et P_2 de même masse m reliés par une tige sans masse à un fil, formant un pendant de torsion. Deux grosses sphères de masse M, S_A et S_B, peuvent être placées de manières à faire dévier le pendule dans un sous ou dans l'autre par l'effet de la gravitation.

Partie 1 : Etude du pendule de torsion
Les masses P_1 et P_2 sont reliées par une tiges sans masse de longeur $2d$, et contraintes de tourner autour de O dans le plan horizontal (O, x, y).

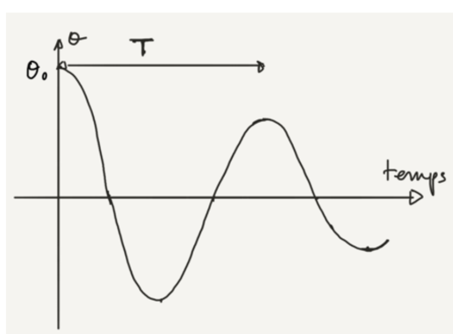


a) Calculer le moment d'inertie I_O du pendule de torsion par rapport à l'axe (Oz)

Le fil est caractérisé par deux constantes, κ et b, définies comme suit :

- le fil exerce un moment élastique dépendant de l'angle de déviation θ, donné par $\overrightarrow{M_O^{el}} = -\kappa\theta\vec{e}_z$
- et les frottements internes du fil exercent le moment $\overrightarrow{M_O^{f}} = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$

On écarte le pendule de sa position d'équilibre de l'angle θ_0 et on le lâche sans lui communiquer de vitesse angulaire. On mesure l'angle de déviation en fonction du temps et on observe des oscillations décroissantes avec une pseudo période T (voir ci-contre)



b) Etablire l'équation différentielle du mouvement sur la variable θ.

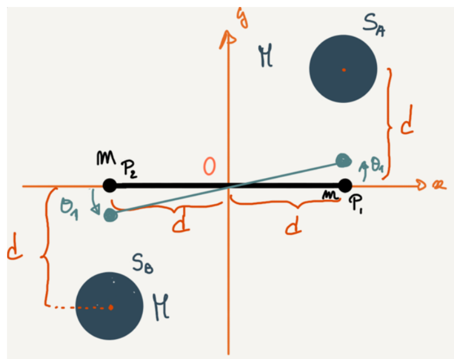
c) Quelle est la pulsation propre du pendule de torsion ?

d) Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle sans calculer les constantes d'intégration. Expliciter la pseudo-période et le facteur d'amortissement en fonction des données du problème.

e) On suppose l'amortissement très faible ($b \approx 0$) et on mesure T. Déterminer κ en fonction de T, m et d.

Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

On amène les deux grosses sphères (S_A, S_B) de masse M, en regard des masses ponctielles (P_1, P_2) à une distance d de l'axe Ox, et on laisse le pendule s'équilibrer avec l'angle de déviation θ_1. On suppose l'angle θ_1 très faible ($\theta \ll 1$).



a) Exprimer (vectoriellement) le moment $\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}$, par rapport à O sur le pendule, lié à la force de gravitation de S_A sur P_1 et de S_B sur P_2.

b) Exprimer (vectoriellement) le moment $\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}$ lié à la force de gravitation de S_A sur P_2 et de S_B sur P_1.

c) Montrer que pour un calcul d'ordre de grandeur, on peut négliger $\|\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}\|$ devant $\|\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}\|$.

d) Exprimer l'angle θ_1 à l'équilibre en fonction de G, M, m, d et κ.

e) Déduire l'expression de G en fontion de M, m, d, T et θ_1, grandeurs qui sont connues ou facilement mesurables.

f) Question subsidiaire (ne faisait pas partie de l'examen) : Utiliser les données de l'expérience pour évaluer l'ordre de grandeur de G. La période T fait 8 minutes, M = 1.5 kg, m = 15g, d = 5cm, et on mesure θ_1 grâce à la déviation du faisceau laser, soit 20 cm sur les 13,5 m de l'amphi