Exercices

Exercice 1 *Dépenser toute son énergie*
On considère un oscillateur harmonique en régime sinusoidal forcé par une force $F_0 \cos \omega_e t$, constitué d'un ressort de raideur k accroché à une masse m et amorti par un frottement fluide avec un coefficient de frottement $b_l = K\eta$.

1. Rappeler l'expression de la position de la masse $x(t)$ en fonction de données du problème et de la pulsation d'excitation ω_e, en régime permanent.
2. Calculer l'énergie dissipée au cours d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$.
   Remarque : On donne $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta = \pi$. *Ceci est obtenu grâce à :* $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = I \Rightarrow 2I = \int_0^{2\pi}(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta \Rightarrow 2I = 2\pi \Rightarrow I = \pi$.
3. En déduire la puissance dissipée en régime permanent.
4. Un oscillateur à ressort amorti, excité à la résonance nécessite une puissance P_r pour compenser l'amortissement. La masse amortie est désignée par m. Si l'on éteint la machine, l'amplitude diminue de moitié en l'espace d'une seconde.
   Quelle est l'amplitude lorsque la machine est en route ?
   A.N. : $f_{res} = 20$ Hz ; $P_r = 800$ W ; $m = 100$ kg.
5. (facultatif) Montrer que P_{diss} est maximal pour $\omega_e = \Omega$.

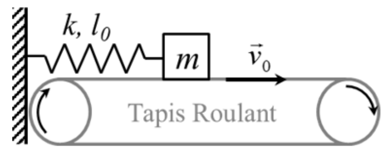
Exercice 2 *Chauve qui peut !*
Le Joker a réussi à piéger Batman ! Ce dernier se retrouve suspendu au bout d'une corde de longueur l entre deux hélices géantes tranchantes comme des lames de rasoir. Ces deux hélices tournent à des vitesses variables, de telle manière que le souffle qui en résulte exerce une force totale $\vec{F_h} = F_0 \cos(\omega_e t)\vec{e}_\varphi$ (perpendiculaire à la corde) sur Batman. On assimile Batman à un point matériel de masse m qui oscille dans un plan contenant les axes de rotation des hélices et on considère la corde comme étant rigide. On néglige de plus les frottements. Pour l'analyse, on place l'origine de notre repère au point d'attache de la corde.

1. Donnez l'équation du mouvement de Batman dans l'approximation des petites oscillations.
2. Exprimez l'amplitude des oscillations de Batman ainsi que la pulsation de résonance ω_{res}.
3. La rotation des hélices est contrôlée par le Joker, de telle sorte que ce dernier puisse ajuster la pulsation ω_e de la force s'exerçant sur Batman. Par ailleurs, les hélices sont assez éloignées pour que l'approximation des petits angles ne soit plus vraie quand

Batman s'en approche. Le Joker étant joueur, il propose au héros de choisir entre une pulsation légèrement supérieure ou inférieure à la pulsation de résonance ω_{res} (calculée au point b). Lequel de ces choix sauvera Batman ? Justifiez sans calcul.

Exercice 3 *Rester fit*

Une masse m est posée sur un tapis roulant sur lequel elle subit une force de frottement sec. On note le coefficient de frottement statique α_s et le coefficient de frottement dynamique α_d. De plus, la masse est attachée au mur par un ressort de raideur k, de longueur au repos l_0, et de masse négligeable. On note g l'accélération de la pesanteur.



1. A l'instant initial ($t = 0$), la longueur du ressort est égale à l_0 (i.e. le ressort est au repos) et le tapis roulant se met en marche. Il entraîne ainsi la masse m à une vitesse constante v_0, sous l'effet du frottement sec statique. Calculez le temps t_d au bout duquel la masse décroche du tapis, ainsi que la distance d parcourue. Exprimez-les en fonction des données du problème. La longueur du tapis est considérée comme très supérieure au déplacement de la masse.
2. Donnez l'équation du mouvement de la masse m juste après avoir décroché du tapis.
3. L'équation précédente est valable tant que la masse glisse sur le tapis. Donnez la condition pour que la masse se raccroche au tapis. Tracez qualitativement la vitesse en fonction du temps à partir de $t = 0$ en supposant $\alpha_d = 0$.

Exercice 4 *Un exercice fragmenté*

Un obus de masse m explose en plusieurs fragments. L'explosion est caractérisée par un facteur Q positif. Q est la différence entre l'énergie cinétique du système après et avant l'explosion $Q = E^f_{\text{cin}} - E^i_{\text{cin}}$.

1. Montrer que si l'obus explose en deux fragments, ils se déplacent dans des directions opposées dans le référentiel CDM du centre de masse.
2. Montrer que si l'obus explose en trois fragments, leur quantité de mouvement par rapport au centre de masse G, se trouvent dans un même plan.
3. Montrer que si l'obus se divise en deux fragments égaux, la norme de leur quantité de mouvement et leur vitesse dans le référentiel CDM sont égales respectivement à $\sqrt{\frac{mQ}{2}}$ et $\sqrt{\frac{2Q}{m}}$.
4. Montrer que si l'obus se divise en trois fragments égaux, dont les deux premiers ont la même vitesse dans le référentiel CDM et forment un angle droit, leur quantité de mouvement dans le référentiel CDM sont respectivement égales à $P_1 = P_2 = \sqrt{\frac{mQ}{6}}$ et $P_3 = \sqrt{\frac{mQ}{3}}$.