Physique Générale « Mécanique »

Examen du 17 janvier 2025, 09:15 – 12:45

Veuillez rédiger vos réponses dans le cahier de réponses ci-joint.

Le cahier ne doit pas être dégrafé. Seul le cahier est ramassé et corrigé.

Dans tous les exercices, sauf indication contraire, les résultats sont à exprimer en fonction des données fournies et des constantes physiques connues.

Chaque réponse doit être justifiée dans le cadre prévu à cet effet (une page blanche supplémentaire est disponible à la fin de chaque exercice si nécessaire).

Le sujet de l'examen comprend 4 exercices.

Seul document autorisé : une feuille de notes manuscrites A4 recto/verso. Pas de calculatrice ni de téléphone.

Formulaire :

Coordonnées polaires :

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$

Coordonnées cylindriques :

$\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$

$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{e}_z$

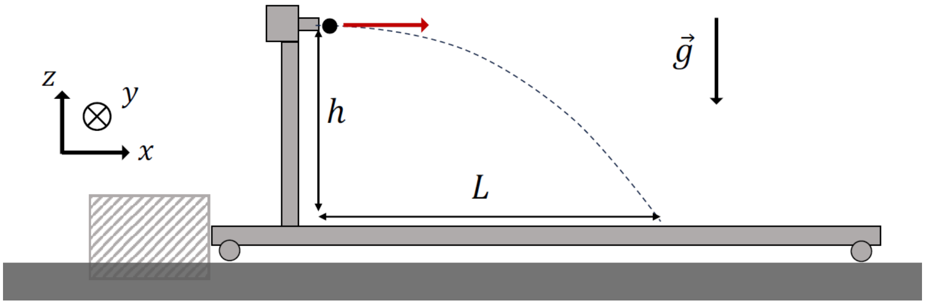
Coordonnées sphériques

$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$

$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\right)\vec{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\right)\vec{e}_\theta + \left(r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta\right)\vec{e}_\varphi$

Exercice 1 (0,9 point) : Lancer sur plateforme mouvante

Une balle, considérée comme un point matériel de masse m, est propulsée horizontalement vers la droite à partir d'une hauteur h par un lanceur capable de convertir une énergie stockée ΔK en énergie cinétique finale. L'ensemble se trouve sur une plateforme de masse M (comprenant la masse du mécanisme de propulsion). On néglige les frottements de l'air et on considère que la plateforme ne décolle jamais du sol (les roues restent au contact de celui-ci). Le sol est considéré comme un référentiel galiléen. La hauteur h est prise par rapport à la base de la plateforme.



Dans un premier temps, la plateforme ne bouge pas lors de la propulsion car elle est empêchée de se déplacer par un bloc immobile (rectangle hachuré sur la figure).

1a Donnez l'expression de la distance L parcourue horizontalement par la balle avant qu'elle ne retombe sur la plateforme en fonction de ΔK et des autres données du problème.

1b En admettant qu'un choc mou ait lieu entre la balle et la plateforme, calculez la vitesse v_1 de la plateforme par rapport au sol juste après l'impact en fonction de ΔK et des autres données du problème.

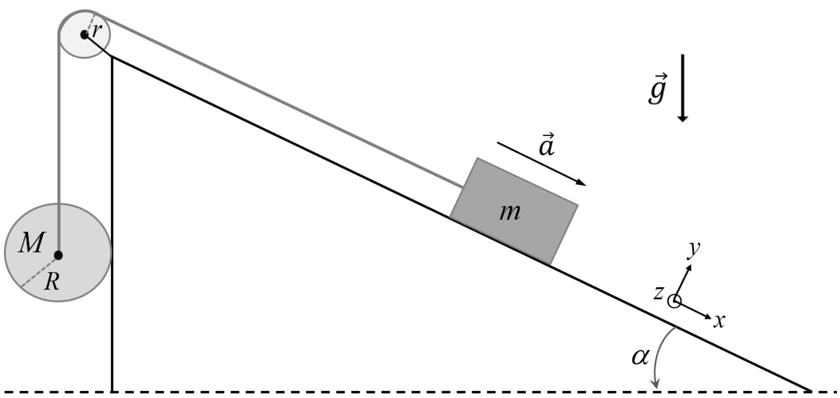
On considère désormais que la plateforme est libre de se déplacer sur le sol sans frottement vers la gauche ou la droite au moment du lancer car le bloc immobile est retiré.

1c Calculez la vitesse v_2 de la plateforme juste après le lancer de la balle en fonction de ΔK et des données du problème.

1d Quelle est la vitesse finale v_3 de la plateforme par rapport au sol après le choc mou de la balle avec la plateforme ?

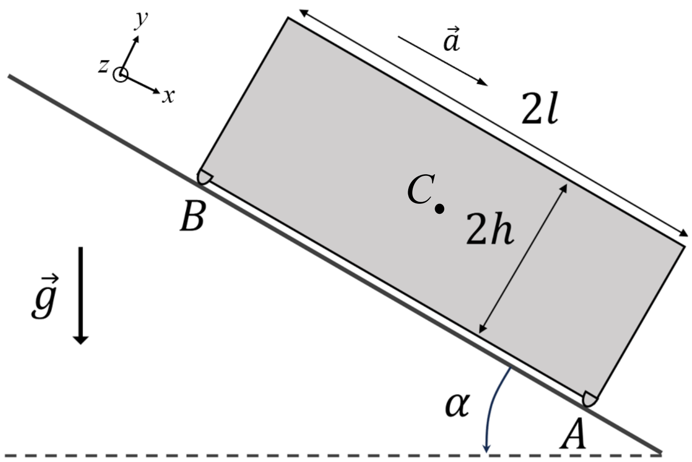
Exercice 2 (1,6 points) : Bloc, roue, et poulie

On considère le système suivant (schéma ci-dessous) : une roue pleine et homogène (de masse M, de rayon R, et de moment d'inertie I_R) roule sans glisser sur une paroi verticale. Cette roue est reliée par un câble (inextensible et sans masse) à un bloc (de masse m) qui glisse sans frottement sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le câble passe sans glissement sur une poulie de moment d'inertie I_P et de rayon r ($r < R$ de tel sorte que le câble est vertical entre la poulie et la roue). Le système est soumis à un champ de pesanteur uniforme $\vec{g}$ et se trouve dans un référentiel galiléen. On néglige les frottements de l'air.



2a Le bloc descend la pente (sans frottement) avec une accélération $\vec{a} = a\vec{e_x}$ et entraîne la roue qui roule sans glisser sur la paroi verticale. Calculez l'accélération a.

Le câble casse et le bloc continue de glisser sur le plan incliné. Il atteint une zone où les frottements secs ne sont plus négligeables (coefficient cinétique μ_c). Le bloc est un solide homogène de côté rectangulaire (longueur $2l$, hauteur $2h$). Il subit des frottements secs aux deux seuls points de contact avec le sol, A et B (ces points de contact ont des dimensions négligeables par rapport à celles du bloc). Le point C est le centre de masse du bloc.



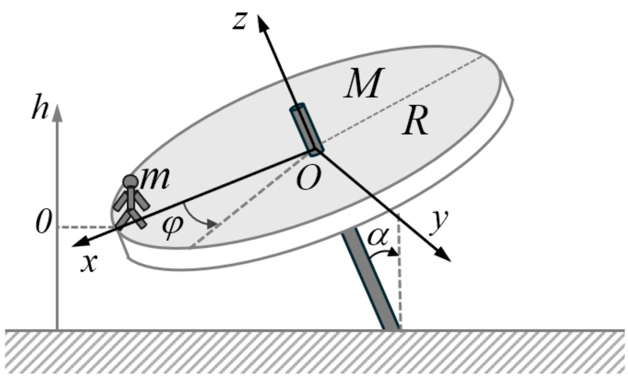
2b Calculez l'accélération a du bloc en tenant compte des forces de frottement sec en A et en B.

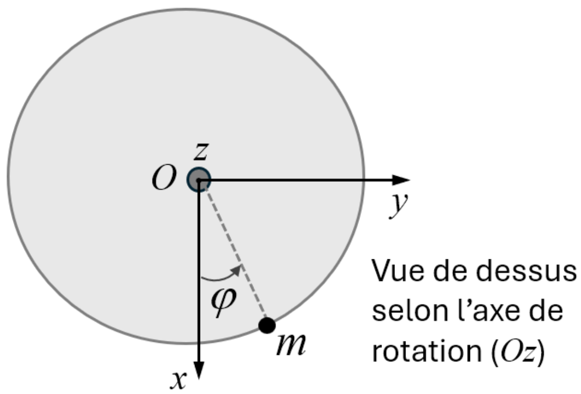
2c Donnez l'expression de la composante selon $\overrightarrow{e_y}$ de la force de réaction normale $\overrightarrow{N_B}$ s'exerçant sur le point B pendant le mouvement. On fera apparaître μ_c dans cette expression.

2d Quelle est la condition sur le rapport l/h pour que le point B ne décolle pas du plan incliné ?

Exercice 3 (1,5 points) : Le manège et l'enfant

Un manège est constitué d'un disque plein homogène de masse M, de rayon R, et de moment d'inertie $I = \frac{1}{2}MR^2$ pour une rotation autour d'un axe principal d'inertie passant par son centre de masse (le point O sur le schéma). Un moteur permet de faire tourner le disque autour d'un axe de rotation (Oz) formant un angle α avec la verticale. Cet axe est fixe (pas de mouvement de précession autour d'un axe vertical). Un enfant de masse m se trouve sur le bord du manège et, à l'exception de la dernière question, il reste immobile. L'enfant est considéré comme un objet ponctuel. Le système est soumis au champ de pesanteur et on néglige tous les frottements. On considère la Terre comme un référentiel galiléen.





3a Calculez le moment d'inertie I_{tot} pour le système « disque + enfant » avec l'enfant à la distance $x = R$.

3b Le moteur fait tourner le disque (et donc l'enfant) d'un angle φ (voir schéma). A partir de considérations géométriques, montrez que l'on peut écrire la relation suivante : $h = R(1 - \cos\varphi)\sin\alpha$, h étant la hauteur atteinte par l'enfant par rapport à sa position initiale définie par $x = R$, $\varphi = 0$ et $h = 0$.

3c Exprimez l'énergie mécanique du système « disque + enfant ».

3d Le moteur fait tourner le disque jusqu'à un angle φ_0 puis le disque est lâché sans vitesse. Calculez l'équation différentielle du mouvement selon φ.

3e Pour un angle φ_0 très petit, donnez l'expression de la pulsation et la forme générale des solutions de l'équation différentielle du mouvement.

Le disque tourne maintenant à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_z}$. Lorsque que l'enfant se trouve au point bas ($x = R, y = 0, z = 0, \varphi = 0$), il tire une balle à la vitesse $\overrightarrow{v_0} = -v_0\overrightarrow{e_x}$. La balle est considérée comme un point matériel et on néglige l'effet du poids.

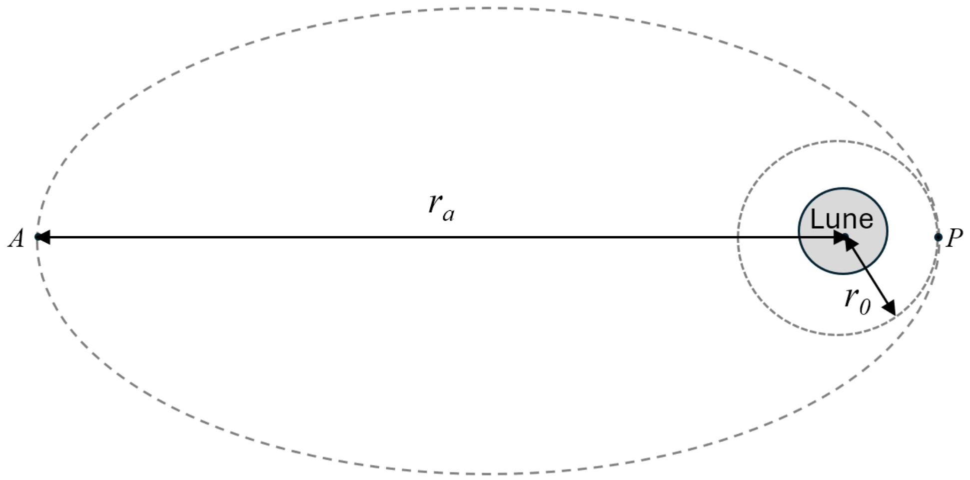
3f Indiquez sur un schéma les forces de Coriolis et centrifuge. Calculez la déviation seulement due à la force de Coriolis lorsque la balle atteint le bord opposé du disque ($x = -R$). On considèrera la vitesse de la balle comme constante au cours de la trajectoire ($\vec{v} = \overrightarrow{v_0}$).

Le disque tourne toujours à la vitesse angulaire $\vec{\Omega} = \Omega\overrightarrow{e_z}$ mais maintenant l'angle α est nul. On coupe le moteur et il n'y a pas de frottement donc Ω est constante. Puis l'enfant décide de rejoindre le centre du manège ($x = 0$).

3g Quelle est alors la vitesse angulaire Ω' lorsque l'enfant est au centre du manège ? Vous exprimerez Ω' en fonction de Ω, M, et m.

Exercice 4 (1,0 point) : Retour sur Terre

Une navette spatiale (de masse m) est en orbite circulaire de rayon r_0 autour de la Lune (de masse M_L) avec une vitesse v_0. Après plusieurs jours d'observation, l'équipage de la navette décide de rentrer sur Terre. Pour cela, il actionne un moteur quand la navette se trouve en P (voir schéma ci-dessous). La vitesse devient $v_1 = v_0 + \Delta v$ et la nouvelle trajectoire est elliptique avec r_a la norme du rayon vecteur à l'apogée.



4a Démontrez que la vitesse orbitale s'écrit sous la forme $v_0 = \sqrt{\frac{GM_L}{r_0}}$.

4b Faites un schéma dans lequel vous reporterez les courbes d'énergie potentielle effective $E_{p,eff}(r)$ correspondant aux vitesses v_0 et v_1. Vous indiquerez aussi r_0 et r_a sur ce schéma.

4c Exprimez r_a en fonction de r_0, v_1, et v_a, la vitesse à l'apogée de la trajectoire en A.

4d Calculez Δv en fonction de G, M_L, r_a, et r_0.