Exercices

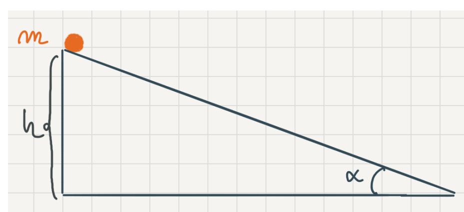
Note préliminaire : Dans cette série, nous allons résoudre pour la première fois des exercices de dynamique. L'idée générale est de trouver une expression pour l'accélération de la grandeur qui nous intéresse (*par exemple* $\ddot{a}(t), \ddot{\varphi}(t), \ddot{h}(t)$) qu'on cherchera à intégrer deux fois pour retrouver l'équation horaire du système.
D'une manière générale, on peut résoudre ces exercices en se basant sur les quelques points vus en cours :

1. Faire un schéma
2. Identifier le système à étudier
3. Choisir un référentiel approprié
4. Poser le repère associé
5. Identifier les forces en jeu et les projeter dans le repère
6. Prendre en compte les contraines et conditions initiales du système
7. Dériver les équations du mouvement (2e loi de Newton) et les intégrer

auquels j'ajouterai un point 0 : Visualiser la configuration et se représenter ce qui va se produire... ou avec d'autres mots, faire marcher son intuition !!

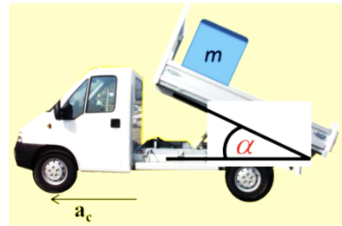
Exercice 1 *Plan incliné*

On place une masse m en haut d'un plan incliné d'un angle α avec l'horizontale. Dans un premier temps, on néglige les frottements. On fera tous les calculs en utilisant les forces. On lâche m sans vitesse initiale.



1. Calculer la vitesse et la position de m en fonction du temps.
2. Calculer le temps mis par m pour arriver en bas du plan, ainsi que la vitesse de m en bas, en fonction de h, α et g.
3. Comparer avec les valeurs obtenues pour une chute libre d'une hauteur h.
4. On suppose maintenant qu'il y a des frottements, et que α est supérieur à la valeur limite permettant à la masse de glisser. Le coefficient de frottement cinétique est μ_c. Refaire les calculs des questions 1 et 2.
5. vérifier que si $\mu_c = 0$ on retrouve le résultat sans frottements.

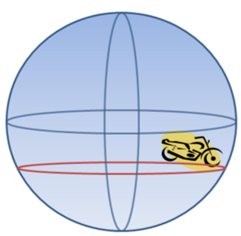
Exercice 2 *Pas la benne d'aller vite*

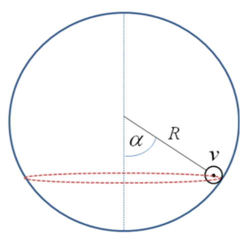


Un camionneur a oublié de redescendre la benne de son camion. Celle-ci fait un angle α avec l'horizontale (cf. schéma). Un paquet de masse m, initialement au repos grâce à la force de frottement sec, se trouve en haut de la benne (on note μ_s et μ_d les coefficients de frottement statique et dynamique).

1. Déterminez l'angle limite α, lorsque le camion est à l'arrêt, pour que le paquet ne glisse pas.
2. On suppose que l'angle est inférieur à l'angle limite. Déterminez la norme minimale de l'accélération horizontale a_c du camion qui va faire que le paquet se mette en mouvement par rapport à la benne (décrochage du paquet). On suppose que le paquet reste toujours en contact avec la benne.

Exercice 3 *La boule de la mort*

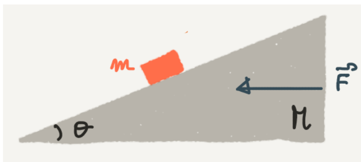




Une attraction rencontrée parfois dans les fêtes foraines consiste pour un motard à entrer dans une « cage » sphérique et à tourner circulairement de plus en plus vite. Au début de la rotation, le motard se trouve dans le bas de la sphère, puis, à mesure que sa vitesse augmente, il « monte ». Il peut ainsi atteindre le milieu de la sphère. Dans cette situation, le corps du motard est à l'horizontal (α=90°). Soit une cage sphérique de rayon R, et un motard (sur sa moto) que l'on considérera comme un point matériel, de masse m, et dans un champ de pesanteur $\vec{g}$. On négligera les frottements.

1. Calculer la vitesse v du motard en fonction de l'angle α (cf. figure) correspondant à une situation d'équilibre (mouvement circulaire uniforme et il ne tombe pas).
2. En s'appuyant sur un schéma où on indiquera les forces, montrez sans calcul que α ne peut pas être supérieur à 90°.

Exercice 4 *Rester en position*



Un petit bloc (d'une masse m) est placé sur le côté pentu d'un bloc triangulaire (d'une masse M) lui-même posé sur une table horizontale.
En supposant qu'il n'y ait aucun frottement sur ces surfaces, déterminez la force qu'il faut exercer sur M pour que m garde une position fixe par rapport au bloc triangulaire (c'est-à-dire qu'il ne glisse pas le long de la pente)

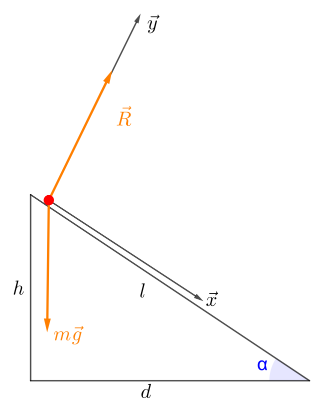
Solutions

Corrigé exercice 1

Lorsqu'on place une masse en haut d'un plan incliné, on s'attend à ce qu'elle tombe vers le bas, entrainée par la force de gravitation de la Terre. L'accélération étant constante, la masse suivra un mouvement rectiligne uniformément accéléré (MRUA). Voyons voir comment cela se traduit mathématiquement.

1. Le système étudié est la masse m qu'on choisit d'étudier dans le référentiel du laboratoire. Naïvement, on pourrait choisir un repère $(\vec{x}, \vec{y})$ horizontal et vertical mais ça n'est pas idéal pour étudier les grandeurs qui nous intéressent ici. Effectivement, la vitesse étant colinéaire à la trajectoire dans le cas d'un MRUA, il est plus pratique de poser l'axe $\vec{x}$ parallèle à la trajectoire afin que le vecteur vitesse n'ait qu'une seule composante. On choisit donc $\vec{x}$ le long du plan incliné, et $\vec{y}$ perpendiculaire à celui-ci. Par simplicité, on pose l'origine du repère à la position initiale de la masse. La grandeur $x(t)$ correspond ainsi à la distance parcourue par la masse après un temps t.

   Les forces en jeu sont (i) la pesanteur $\vec{F}_p = m\vec{g}$, et (ii) la force de soutien $\vec{R}$ du plan incliné qui illustre le fait que la masse ne le traverse pas.

   Dans le repère $(\vec{x}, \vec{y})$, les forces s'expriment ainsi : $\overrightarrow{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$, et $m\overrightarrow{g} = \begin{pmatrix} mg\sin\alpha \\ -mg\cos\alpha \end{pmatrix}$.

   On peut écrire la deuxième loi de Newton sous forme vectorielle $\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{R} + m\vec{g}$ qu'on projette sur les deux axes du repère :

   $$\begin{cases} ma_x = mg\sin\alpha \\ ma_y = R - mg\cos\alpha \quad \text{(contrainte de liaison)} \end{cases}$$

   Résolvons maintenant cette équation différentielle en utilisant les conditions initiales $\vec{v}(t=0) = (v_{x,0}, v_{y,0}) = \vec{0}$, et $\vec{x}(t=0) = (x_0, y_0) = \vec{0}$:

   $a_x = g\sin\alpha \Rightarrow v_x(t) = (g\sin\alpha)t + \underset{0}{\cancel{v_{x,0}}} \Rightarrow x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2 + \underset{0}{\cancel{x_0}}$

   $v_x(t) = (g\sin\alpha)t$ et $x(t) = \frac{1}{2}(g\sin\alpha)t^2$

   $v_y = 0$ et $y(t) = 0$

2. Le bas du plan est atteint quand $x(t_f) = l$. On s'intéresse alors au mouvement selon l'axe $\vec{x}$ uniquement :

   $\frac{1}{2}(g\sin\alpha)t_f = l$. Or, trigonométriquement on a la relation $\sin\alpha = \frac{h}{l} \Rightarrow l = \frac{h}{\sin\alpha}$

   $t_f = \sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin^2\alpha}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$v(t_f) = g \sin \alpha t_f = \frac{\cancel{g sin\alpha}}{\cancel{\sin \alpha}} \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{2gh}$

3. Dans le cas d'une chute libre de hauteur h, la force de réaction $\vec{R}$ n'existe pas. Le mouvement est purement vertical et la distance parcourue est donnée par les équations de la balistique $x(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2$, avec $x_0 = v_0 = 0$, et la norme de la vitesse par $v(t) = g \cdot t$. Ainsi le temps de chute pour lequel $x(t_c) = h$ vaut $t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

   La vitesse vaut elle $v_c = \sqrt{2gh}$. La masse arrive donc en bas avec la même vitesse mais au bout d'un temps beaucoup plus long.

4. On rajoute la force de frottements $\vec{F}_F$ qui s'oppose au mouvement : $\overrightarrow{\vec{F}_f} = \begin{pmatrix} -F_F \\ 0 \end{pmatrix}$.

   On réécrit donc la 2e loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R} + \vec{F}_F$

   $\begin{cases} ma_x = mg \sin \alpha - F_F \\ ma_y = -mg \cos \alpha + R = 0 \quad \Rightarrow R = mg \cos \alpha \end{cases}$

   L'angle α étant suffisamment grand pour mettre la masse en mouvement, on a affaire à des frottements cinétiques décrits par la relation $F_F = \mu_c R = \mu_c mg \cos \alpha$. Ainsi :

   $$\Rightarrow \cancel{m}a_x = \cancel{m}g \sin \alpha - \mu_c \cancel{m}g \cos \alpha$$

   On peut intégrer cette équation du mouvement avec les mêmes conditions initiales que précédemment :

   $$\begin{aligned} a_x &= g \sin \alpha \left[1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}\right] \\ v_x &= g \sin \alpha \left[1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}\right] \cdot t \\ x(t) &= \frac{1}{2} g \sin \alpha \left[1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}\right] t^2 \end{aligned}$$

   Le temps t_2 pour arriver en bas de la rampe est :

   $t_2 = \sqrt{\dfrac{2l}{g \sin \alpha \left[1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}\right]}}$

   $t_2 = \dfrac{1}{\sin \alpha \sqrt{1 - \frac{\mu_c}{\tan \alpha}}} \sqrt{\dfrac{2h}{g}} > t_{\text{chute libre}}$

   $v(t_2) = \sqrt{1 - \dfrac{\mu_c}{\tan \alpha}} \sqrt{2gh} < v_{\text{chute libre}}$

   Cette fois le temps est encore plus long et la vitesse est plus faible que pour le plan incliné.

5. On vérifie bien que si $\mu_c = 0$:

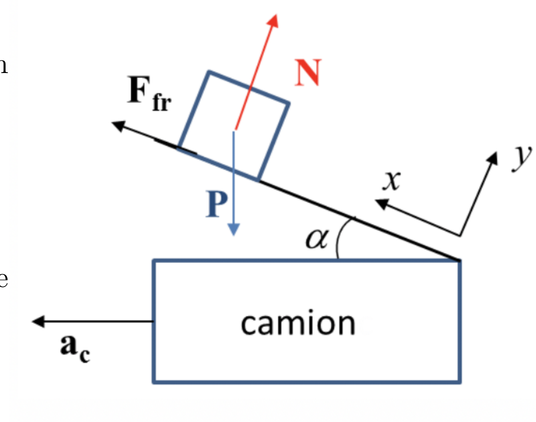
$$t_2 = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2h}{g}}$$
$$v(t_2) = \sqrt{2gh}$$

On retrouve les résultats précédents.

Corrigé exercice 2

La situation est similaire au cas précédent. En partant d'un angle nul, le paquet va se mettre à bouger à partir d'un certain angle critique α_{lim} pour lequel la composante de la gravitation le long du plan incliné sera plus forte que la force de frottements statique.

Comme dans le cas précédent, on choisit un repère d'axe inclinés avec cette fois-ci $\hat{e}_x$ pointant vers le haut du plan incliné.



1. Dans un premier temps le camion est au repos. On fait un bilan des forces qui agissent sur le paquet :
   - Son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg(\sin\alpha\vec{e}_x + \cos\alpha\vec{e}_y)$
   - La réaction du support : $\vec{N} = N\vec{e}_y$
   - Force de frottement sec statique entre la benne et le paquet $\vec{F}_{fr} = F_{fr}\vec{e}_x$
     - On a $\|F_{fr}\| \leq \mu_s\|N\|$

   On applique la seconde loi de Newton :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a} = 0 => \begin{cases} 0 = F_{fr} - mg\,\sin\alpha \\ 0 = N - mg\,\cos\alpha \end{cases}$$

   Pour que le paquet ne glisse pas, il faut que la force de frottement soit plus importante que la composante selon $\hat{e}_x$ de la force de pesanteur :

$$F_{fr} = mg\sin\alpha < \mu_s N$$

Ainsi :

$$
\begin{aligned}
& mg\sin\alpha < \mu_s mg\cos\alpha \\
& \Rightarrow \tan\alpha < \mu_s \\
& \Rightarrow \alpha_{\text{lim}} = \arctan\mu_s.
\end{aligned}
$$

2. On applique la seconde loi de Newton au paquet dans le repère galiléen $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$ lié au sol :

$$\Sigma\vec{F} = m\vec{a}_{\text{paquet/sol}} => \begin{cases} m\ddot{x} = F_{fr} - mg\,sin\alpha \\ m\ddot{y} = N - mg\,cos\alpha \end{cases}$$

Le référentiel relatif $(\hat{e}_x, \hat{e}_y)$ étant en translation uniquement par rapport au référentiel absolu $(\hat{e}_1, \hat{e}_2)$, on peut écrire l'accélération du paquet par rapport au sol comme la somme de l'accélération du paquet par rapport au camion et de l'accélération du camion par rapport au sol :

$$\vec{a}_{\text{paquet/sol}} = \vec{a}_{\text{paquet/camion}} + \vec{a}_{\text{camion/sol}}$$

On a par ailleurs l'accélération du camion par rapport au sol :

$$a_{\text{camion/sol}} = a_c(\cos\alpha\hat{e}_x - \sin\alpha\hat{e}_y).$$

L'accélération du paquet par rapport au camion n'a pas de composante selon $\hat{e}_y$ car le paquet reste en contact avec la benne. De plus, on étudie le cas statique car on cherche la limite pour laquelle le paquet se met en mouvement. Donc la composante selon $\hat{e}_x$ de l'accélération du paquet par rapport au camion est aussi nulle. D'où :

$$a_{\text{paquet/sol}} = a_{\text{camion/sol}} => \begin{cases} \ddot{x} = a_c\cos\alpha \\ \ddot{y} = -a_c\sin\alpha \end{cases}$$

En intégrant ces relations dans la loi de Newton dérivée précédemment, et en se concentrant sur la composante selon $\hat{e}_y$, on a :

$$-ma_c\,\sin\alpha = N - mg\,\cos\alpha => N = mg\,\cos\alpha - ma_c\,\sin\alpha$$

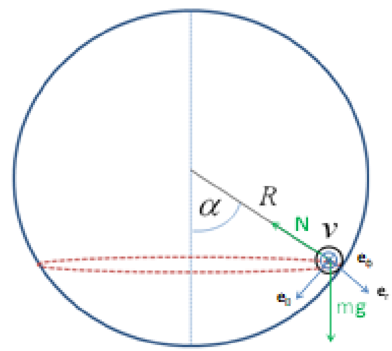
Pour déterminer l'accélération minimum du camion, on utilise l'inégalité sur la force de frottement :

$$
\begin{aligned}
& \|F_{fr}\| \leq \mu_s\|N\| \\
& => m\ddot{x} + mg\,\sin\alpha \leq \mu_s(m\ddot{y} + mg\,\cos\alpha) \\
& => m(a_c\cos\alpha + g\sin\alpha) \leq \mu_s m(-a_c\,\sin\alpha + g\,\cos\alpha) \\
& => a_c(\cos\alpha + \mu_s\,\sin\alpha) \leq g(\mu_s\,\cos\alpha - \sin\alpha) \\
& => a_c \leq \frac{g(\mu_s\,\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_s\,\sin\alpha)}
\end{aligned}
$$

L'accélération minimale pour que le paquet se mette à glisser est donc :

$$\frac{g(\mu_s\,\cos\alpha - \sin\alpha)}{(\cos\alpha + \mu_s\,\sin\alpha)}$$

Corrigé exercice 3



1. On utilisera un repère sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$, en accord avec la symétrie du problème.
   Il y a deux forces en jeu : la pesanteur $m\vec{g}$ ainsi que la force de soutien de la sphère $\vec{N}$. Ainsi, la seconde loi de Newton nous dit : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$ La projection des forces sur le repère sphérique s'écrit :

   $$\sum \vec{F} = (mg\,\cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\,\sin\alpha\,\vec{e}_\theta$$

   L'accélération en coordonnées sphériques est donnée par :

   $$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2\sin^2\theta)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta)\vec{e}_\theta + (r\ddot{\varphi}\sin\theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta + 2\dot{r}\dot{\varphi}\sin\theta)\vec{e}_\varphi$$

   Avec les contraintes $r = cte = R \Rightarrow \dot{r} = \ddot{r} = 0$ (mouvement sur la paroi interne de la sphère, i.e. $r = R$ fixé), $\theta = cte \Rightarrow \dot{\theta} = \ddot{\theta} = 0$ $\dot{\varphi} = cte \Rightarrow \ddot{\varphi} = 0$ (pour la situation à l'équilibre décrite), la seconde loi de Newton devient :

   $$(mg\,\cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\,\sin\alpha\,\vec{e}_\theta = m(-R\dot{\varphi}^2\sin^2\theta\vec{e}_r - R\dot{\varphi}^2\cos\theta\sin\theta\vec{e}_\theta)$$

   On remarque que $\alpha = \pi - \theta$, donc $\cos\theta = \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ et $\sin\theta = \sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$:

   $$\Rightarrow (mg\,\cos\alpha - N)\vec{e}_r + mg\,\sin\alpha\,\vec{e}_\theta = -mR\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha\vec{e}_r + mR\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha\vec{e}_\theta)$$

   En projetant la seconde loi de Newton sur les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$, on a :

   $$\begin{cases} mg\,\cos\alpha - N = -mR\dot{\varphi}^2\sin^2\alpha \\ mg\,\sin\alpha = mR\dot{\varphi}^2\cos\alpha\sin\alpha \end{cases}$$

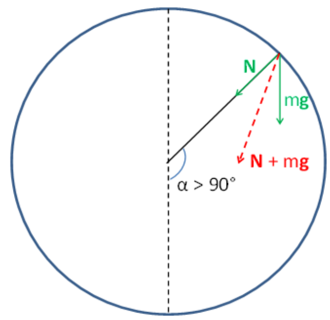
   Avec la deuxième équation, on obtient :

   $$\dot{\varphi}^2 = \frac{g}{R\cos\alpha} \Rightarrow \dot{\varphi} = \sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}$$

On en déduit la vitesse :

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\vec{e}_\varphi = R\dot{\varphi}\sin\alpha\vec{e}_\varphi = R\sqrt{\frac{g}{R\cos\alpha}}\sin\alpha\vec{e}_\varphi = \sin\alpha\sqrt{\frac{Rg}{\cos\alpha}}\vec{e}_\varphi$$

2. Pour que le mouvement du motard puisse être circulaire uniforme, il faut que son accélération soit uniquement radiale, c'est-à-dire que la résultante des forces ne doit avoir qu'une composante horizontale, dirigée vers l'axe central de la sphère. Les composantes verticales de la force de pesanteur et de la force de soutien de la sphère doivent pouvoir se contrebalancer. Ce n'est pas possible si l'angle α est supérieur ou égal à 90° car alors la composante verticale de la force de soutien est dirigée vers le bas, donc dans le même sens que la force de pesanteur.



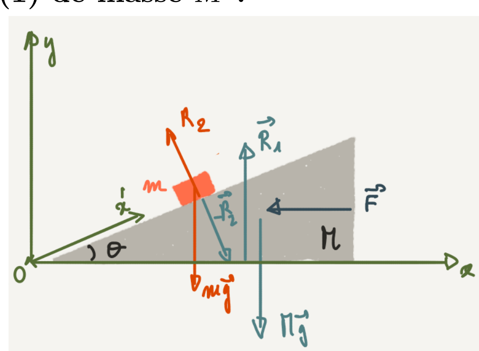
Corrigé exercice 4

Il faut ici bien réfléchir.. le système est compliqué. Il faut identifier la bonne condition correspondant à l'énoncé. Si le bloc de masse m est immobile par rapport à M, c'est que l'accélération des deux blocs est identique.

$$\vec{a}_1 = \vec{a}_2 = \vec{a}$$

Nous allons faire le bilan des forces :

Sur (1) de masse M :



$\vec{F}$ force appliquée

$M\vec{g}$ poids

$-\vec{R}_2$ opposé de la réaction de (2) sur (1)

$\vec{R}_1$ réaction du sol

$$\sum \vec{F} = M\vec{a} = \vec{F} + M\vec{g} + \vec{R}_1 - \vec{R}_2 \qquad (1)$$

Sur (2) de masse m :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{R}_2 \qquad (2)$$

On cherche $\vec{F}$. On ne connait ni $\vec{R}_1$ ni $\vec{R}_2$, ni $\vec{a}$. Stratégie : obtenir des équations découplées $\vec{R}_1$ et $\vec{R}_2$ et ensuite projeter sur les normales respectives.

$$\begin{array}{ll} (1)+(2) & \Rightarrow (M+m)\vec{a} = (M+m)\vec{g} + \vec{F} + \vec{R}_1 \qquad (6) \\ (6) \text{ projeté sur } (Ox) & \Rightarrow -(M+m)a = -F + 0 + 0 \\ (2) \text{ projeté sur } (Ox') : & -ma\cos\theta = -mg\sin\theta \Rightarrow a = g\tan\theta \end{array}$$

$$\Rightarrow \boxed{F = (M+m)g\tan\theta}$$