

## Exercices

### Exercice 1 *L'élève Ducobu*

Un élève turbulent tire des boulettes de papier mâché à une vitesse  $v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$  avec sa sarbacane depuis une hauteur de 1.2 m. Il vise le haut du tableau noir à 3 m devant lui. Le tableau est accroché à 1 m du sol et fait 1.50 m de haut. Atteint-il le tableau ?

*Astuce* :  $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha$

### Exercice 2 , 30 minutes \*\*

On place un canon au pied d'une colline dont la pente fait un angle  $\varphi$  avec l'horizontale. Si on pointe le canon à un angle  $\alpha$  de l'horizontale et si l'obus a une vitesse initiale  $v_0$ , trouver la distance  $l$  mesurée *sur la colline*, à laquelle il tombera.

### Exercice 3 *Winter is coming*

Un étudiant du cours de physique s'engage dans une bataille de boules de neige avec un ami. Cet ami parvient à rattraper les boules et à les renvoyer immédiatement.

L'étudiant sait qu'une boule de neige peut être envoyée à deux angles de tir différents, mais avec la même vitesse, et arriver au même point d'impact. Cependant, les temps de vol sont différents. Aussi, pour gagner la partie, l'étudiant décide de jeter deux boules, à des instants différents, l'une sur une trajectoire supérieure à l'autre. La balle supérieure créera une diversion, pendant que l'ami se préparera à l'attraper, la seconde boule arrivera et les deux balles frapperont simultanément. Si les amis sont à une distance  $L$  l'un de l'autre et qu'ils lancent les boules à une vitesse initiale  $v_0$  :

1. Quels sont les angles de tir ?
2. Combien de temps faut-il attendre avant de jeter la deuxième boule ?
3. Application numérique :  $L = 25 \text{ m}$  et  $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### Exercice 4 *David et Goliath*

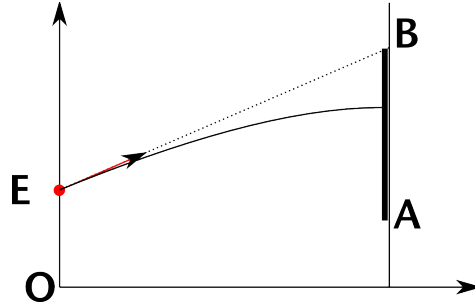
*Il s'agit là d'un exemple d'exercice qui demande (un peu) de modéliser le problème et de le décomposer en éléments. Cette façon de procéder est le quotidien de la vie de l'ingénieur.*

Une fronde est constituée d'une ficelle de 30 cm de long qui retient une pierre et qu'on fait tourner rapidement dans un plan horizontal, puis qu'on relâche brusquement.

Si l'on manie l'engin depuis une hauteur de 1m80 et qu'on veut atteindre une cible au sol située à 10 mètres, à quelle vitesse doit-on faire tourner la fronde ? Comment pourrait-on faire pour avoir besoin d'une vitesse de rotation moins rapide (en gardant la même fronde) ? Quelle est la vitesse de rotation minimale ?

## Solutions

### Solution 1



$$E = \begin{pmatrix} x_E \\ y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.2 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2.5 \end{pmatrix}$$

Or,

$$\tan \alpha = \frac{y_B - y_E}{x_B} = \frac{y_B - y_E}{x_A}$$

On en tire donc :

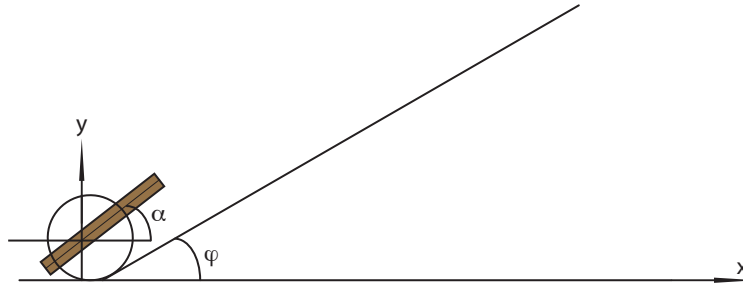
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \alpha)t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t + y_E \end{pmatrix}$$

La boulette arrive sur le mur à  $t_A = \frac{x_A}{(v_0 \cos \alpha)}$ . La coordonnée en y est alors donnée par

$$\begin{aligned} y(t_A) &= -\frac{1}{2}gt_A^2 + (v_0 \sin \alpha)t_A + y_E \\ &= -\frac{gx_A^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} + (\tan \alpha)x_A + y_E \\ &= -\frac{gx_A^2}{2v_0^2} (1 + \tan^2 \alpha) + (\tan \alpha)x_A + y_E \\ &= -\frac{gx_A^2}{2v_0^2} \left(1 + \left(\frac{y_B - y_E}{x_A}\right)^2\right) + \frac{y_B - y_E}{x_A} x_A + y_E \\ &= -\frac{g}{2v_0^2} (x_A^2 + (y_B - y_E)^2) + y_B \end{aligned}$$

A.N. :  $y(t_A) = 1.98$  m. La boulette arrive donc sur le mur à 1.98 m du sol.  
 Le tableau est touché.

Solution 2



Système : obus ; référentiel : terrestre ; repère  $(O\vec{x}\vec{y})$ .

Remarque : il vaut mieux prendre ce repère car dans ce cas les équations du mouvement sont plus faciles à écrire (accélération selon  $(O\vec{y})$  seulement).

Pour l'obus tiré à  $t = 0$  depuis  $O$  à  $\vec{v}_0$ , on a :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{r}_{ob} = \begin{pmatrix} (v_0 \cos \alpha)t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \end{pmatrix}$$

L'obus tombe sur la colline quand la courbe décrite par l'obus croise l'équation de la colline  $y = x \tan \varphi$ .

L'obus tombe en  $P = \begin{pmatrix} x_p \\ y_p \end{pmatrix}$  et donc il faut que  $y_p = x_p \tan \varphi$ .

$$\vec{r}_p = \begin{cases} x_p = (v_0 \cos \alpha)t_p & (1) \\ y_p = -\frac{1}{2}gt_p^2 + (v_0 \sin \alpha)t_p & (2) \end{cases}$$

$$y_p = x_p \tan \varphi \quad (3)$$

Nous avons 3 équations à 3 inconnues  $x_p, y_p, t_p$ . On cherche  $x_p$  ou  $y_p$ ...

Éliminons  $t_p$  : (1)  $\Rightarrow t_p = \frac{x_p}{v_0 \cos \alpha}$ .

$$\begin{cases} y_p = -\frac{1}{2}g \left( \frac{x_p}{v_0 \cos \alpha} \right)^2 + (v_0 \sin \alpha) \frac{x_p}{v_0 \cos \alpha} \\ y_p = x_p \tan \varphi \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient

$$x_p \tan \varphi + \frac{1}{2}g \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 - \tan \alpha x_p = 0$$

On en tire :

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p^2 - (\tan \alpha - \tan \varphi)x_p = 0 \Rightarrow x_p = 0 \text{ (sans intérêt)}$$

ou alors

$$\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_p = \tan \alpha - \tan \varphi$$

Ainsi :

$$x_p = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} [\tan \alpha - \tan \varphi]$$

donc :

$$l = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha [\tan \alpha - \tan \varphi]}{g \cos \varphi}$$

Moyennant quelques transformations trigonométriques, on pourrait également écrire

$$l = \frac{2v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \varphi)}{g \cos^2 \varphi}$$

### Solution 3

1. Les équations du mouvement sont :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha t \\ -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement au point  $L$  donnent :

$$\begin{cases} L = v_0 \cos \alpha t_f \\ 0 = -\frac{1}{2}gt_f^2 + v_0 \sin \alpha t_f \end{cases}$$

**Variante 1** Nous combinons ces deux équations pour obtenir

$$\begin{cases} t_f = \frac{L}{v_0 \cos \alpha} \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{gL}{v_0^2} \end{cases}$$

Sachant que  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$ , nous obtenons  $\sin 2\alpha = \frac{gL}{v_0^2}$ , ce qui nous fait deux angles de tir, puisque  $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$ .

**Variante 2** Nous réarrangeons ces deux équations pour obtenir

$$\begin{cases} v_0 \cos \alpha = \frac{L}{t_f} \\ v_0 \sin \alpha = \frac{1}{2}gt_f \end{cases}$$

En additionnant le carré de chacune de ses équations, nous obtenons

$$v_0^2 = \frac{L^2}{t_f^2} + \frac{1}{4}g^2t_f^2$$

qui nous permet de trouver, en utilisant la formule de Viet :

$$t_f^2 = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g^2L^2}}{\frac{1}{2}g^2}$$

Les deux solutions donnent les temps de vol sur chacune des trajectoires ; les angles sont obtenus grâce à la formule  $\cos \alpha = \frac{L}{v_0t_f}$

2. Temps de tir des deux boules (variante 1) :

$$t_{1,2} = \frac{L}{v_0 \cos \alpha_{1,2}}$$

et donc :

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{L}{v_0} \left( \frac{1}{\cos \alpha_2} - \frac{1}{\cos \alpha_1} \right)$$

3. A.N. Les angles de tir sont :  $\alpha_2 = 18.9^\circ$  et  $\alpha_1 = 71.1^\circ$  ; les temps de vol deviennent  $t_1 = 1.32$  s,  $t_2 = 3.86$  s, et donc  $\Delta t = 2.54$  s.

#### Solution 4

Nous considérons d'abord que la fronde et le caillou sont dans un même plan parallèle au sol.

Le référentiel est terrestre et le repère  $(O, x, y)$  où  $O$  est le point d'attache de la fronde. Soit  $P$  le point d'impact du caillou. Alors

$$P = \begin{pmatrix} l \\ -h \end{pmatrix}$$

La première chose à faire est de calculer la vitesse  $v_0$  que doit avoir le caillou pour atteindre  $P$ . Puis, avec  $v_0$ , nous serons capable de calculer la vitesse angulaire de la fronde...

La balistique nous donne :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \\ -gt \end{pmatrix} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} v_0t \\ -\frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix}$$

L'arrivée au sol se fait en  $P = \begin{pmatrix} l \\ -h \end{pmatrix}$  à  $t_p$ , soit

$$\vec{r}(t_p) = \begin{pmatrix} v_0t_p = l \\ -\frac{1}{2}gt_p^2 = -h \end{pmatrix} \tag{4}$$

De (4), nous avons  $t_p = \frac{l}{v_0}$  que nous injectons dans (5) :  $\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_0^2} = h$ , dont on tire :

$$v_0 = l\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

De la relation  $v_0 = \omega_0 R$ , nous avons :

$$\omega_0 = \frac{l}{R}\sqrt{\frac{g}{2h}}$$

A.N. :  $\omega_0 = \frac{10}{0.30}\sqrt{\frac{9.81}{2 \cdot 1.8}} \simeq 55 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Il est possible de réduire la vitesse de rotation de la fronde pour atteindre la cible en modifiant l'angle de tir. Pour le déterminer, il s'agit de minimiser la vitesse par rapport à cet angle.

En ajoutant un angle de tir défini par rapport à l'horizontale au problème (pour rappel  $-\arctan \frac{h}{l} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ), nous trouvons l'équation de la vitesse de la façon suivante :

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ -gt + v_0 \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 t \cos \alpha \\ -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = \vec{OP} \Rightarrow \begin{cases} v_0 t_p \cos \alpha = l \\ -\frac{1}{2}gt_p^2 + v_0 t_p \sin \alpha = -h \end{cases} \quad (6)$$

$$(7)$$

De (6), on tire :  $t_p = \frac{l}{v_0 \cos \alpha}$ , que l'on injecte dans (7) :  $-\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + l \tan \alpha = -h$ , soit  $\frac{1}{2}g\frac{l^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = h + l \tan \alpha$ , et donc finalement :

$$v_0 = \frac{l}{\cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + l \tan \alpha)}} \Rightarrow \omega_1 = \frac{l}{R \cos \alpha} \sqrt{\frac{g}{2(h + l \tan \alpha)}}$$

Minimiser  $v_0$  correspond à déterminer  $\frac{dv_0}{d\alpha} = 0$ , qui peut être résolu numériquement avec une bonne calculatrice...ou bien à littéralement après un astucieux développement. Récrivons  $v_0$  :

$$v_0(\alpha) = \sqrt{\frac{gl^2/2}{\cos^2 \alpha (h + l \tan \alpha)}} = \sqrt{\frac{cte}{f(\alpha)}}$$

avec  $f(\alpha) = \cos^2 \alpha (h + l \tan \alpha)$ . Comme la fonction  $1/x$  est monotone décroissante pour  $x > 0$  et la fonction  $\sqrt{x}$  monotone croissante, minimiser  $v_0$  revient à maximiser  $f(x)$ . On

cherche donc la valeur de  $\alpha$  telle que  $df/d\alpha = 0$ . C'est déjà moins horrible que de travailler avec  $v_0$ ...

$$f(\alpha) = h \cos^2 \alpha + l \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\frac{df}{d\alpha} = -2h \sin \alpha \cos \alpha + l(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) = -h \sin(2\alpha) + l \cos(2\alpha)$$

Cette expression s'annule seulement quand  $l \cos 2\alpha - h \sin 2\alpha = 0$ , c.-à.d. quand  $\tan 2\alpha = \frac{l}{h}$ .  
L'expression de angle de tir optimal devient alors relativement simple

$$\alpha_{opt} = \frac{1}{2} \arctan \frac{l}{h}$$

A.N. :  $\alpha_{opt} = 39.8^\circ$ ,  $\omega_1 = 30,2 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$