Exercices

Exercice 1 *Drone days à l'EPFL*

Deux amateurs de drones font voler leur engin sur un terrain de foot. On prend un système de coordonnées cartésiennes, avec l'axe Oz pointant vers le haut. Le drone A a son vecteur position dépendant du temps t donné par :

$$\vec{r}_A = \begin{pmatrix} 1.2t \\ 0.5t \\ 0.2t \end{pmatrix}$$

Le drone B a son vecteur position dépendant du temps t donné par :

$$\vec{r}_B = \begin{pmatrix} 0.2t^2 \\ 5 \\ 0.15t \end{pmatrix}$$

Les positions sont exprimées en mètres.

1. Quelle est l'allure des 2 trajectoires ?
2. Donner les vecteurs vitesse et accélération de chacun des drones en fonction du temps.
3. Que valent vitesse scalaire et accélération scalaire de chacun des drones ?
4. Quelle est, en fonction du temps, la distance d_{AB} entre les drones ?

Comment feriez vous pour trouver la distance minimale ?

Exercice 2 *Ça plane pour moi*

Un planeur est lâché par l'avion qui le remorquait dans un courant ascendant. A partir de l'instant du lâcher ($t = 0$), il a la trajectoire suivante (coordonnées cartésiennes, Oz vers le haut) :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200\cos(0.2t) + 100 \\ 200\sin(0.2t) + 500 \\ 3t + 600 \end{pmatrix}$$

les valeurs étant données en mètres.

1. Donner le vecteur vitesse et le vecteur accélération ainsi que la vitesse et l'accélération scalaires (normes de la vitesse et de l'accélération) en fonction du temps.
2. À quel instant le planeur atteint-il 2000 mètres d'altitude ?
3. Quelle est l'allure de la trajectoire ? Que pensez-vous des valeurs trouvées pour a et v ?

4. On souhaite exprimer la position à l'aide des coordonées cylindriques. Quelle devra être la nouvelle origine de ce système de coordonnées, pour que les équations du mouvement deviennent plus simples ? Comment s'expriment ces coordonnées en fonction temps ?

Exercice 3 *On fait tourner les tubes*

Une centrifugeuse est un dispositif utilisé en laboratoire de biologie pour séparer certains composants dans un fluide (par exemple sang ou plasma). C'est un disque qui peut être mis en rotation très rapide et sur la périphérie duquel on fixe des tubes à essais contenant le liquide à centrifuger.
On considère une centrifugeuse de rayon $R = 20$ cm qui peut tourner à maximum $N_m = 15'000$ tours/minutes. Un tube à essais est placé sur la périphérie (donc à 20cm du centre) et on s'intéresse au mouvement de ce tube qu'on considérera comme un point matériel.
Dans un premier temps, la centrifugeuse tourne à sa vitesse maximale.

1. Trouver la vitesse angulaire maximale du tube à essai.
2. Trouver la vitesse scalaire maximale du tube à essai
3. Trouver l'accélération normale du tube à essai.
4. Faire une application numérique pour les trois grandeurs précédentes.

   Maintenant on regarde la mise en route de la centrifugeuse. Il lui faut $N_f = 5000$ tours pour atteindre sa vitesse maximum depuis l'arrêt. L'accélération angulaire est constante dans cette phase.
5. Trouver l'expression de l'accélération angulaire de la centrifugeuse en fonction de N_f et N_m, puis faire l'application numérique
6. Trouver l'expression de l'accélération tangentielle durant la phase d'accélération et faire l'application numérique
7. Donner l'expression vectorielle de la vitesse et de l'accélération en coordonnées de Fresnet.

Exercice 4 *L'agent Logan a un train à prendre*

Lancé à la poursuite d'un criminel, l'agent Logan du FBI doit traverser une rivière d'une largeur de 1600 m qui coule à 0.80 m·s^{-1} en un minimum de temps et se rendre directement en face de son point de départ.
Sachant qu'il peut ramer à 1.50 m·s^{-1} et courir à 3.00 m·s^{-1}, décrivez la route qu'il devrait suivre (en bateau et à pied le long de la rive) pour traverser ce cours d'eau le plus rapidement possible. Déterminez le temps minimal requis pour cette traversée.

Rappel : si un bateau se déplace à la vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'eau d'une rivière, et que la rivière coule à $\vec{v}_c$ par rapport à la rive, alors le bateau se déplace à $\vec{v} + \vec{v}_c$ par rapport à la rive.

Indication : Cet exercice est difficile. Vous avez les outils mathématiques pour le résoudre, mais il demande de comprendre la globalité de la problématique, de bien décomposer le problème, et il faut faire les projections proprement !

Solutions

Solution 1 *Drone days à l'EPFL*

1. Trajectoire A : La trajectoire est une droite selon une diagonale du terrain, le mouvement est un mouvement rectiligne uniforme (MRU)

   Trajectoire B : La trajectoire dessinée par le drone est parabolique, selon l'axe x, le mouvement est rectiligne uniformément accéléré (MRUA) et selon l'axe z, le mouvement est rectiligne uniforme. La combinaison des deux donne une trajectoire parabolique dans le plan xz.

2. $$\vec{v}_A = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.5 \\ 0.2 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

   $$\vec{v}_B = \begin{pmatrix} 0.4t \\ 0 \\ 0.15 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

   $$\vec{a}_A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

   $$\vec{a}_B = \begin{pmatrix} 0.4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3. $$||\vec{v}_A|| = \sqrt{1.44 + 0.25 + 0.4} = \sqrt{1.73} \approx 1.32 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
   $$||\vec{v}_B|| = \sqrt{0.16t^2 + 0 + 0.0225} = \sqrt{0.16t^2 + 0.0225} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$
   $$||\vec{a}_A|| = 0\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$
   $$||\vec{a}_B|| = 0.4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

4. Calcul du vecteur $\vec{r}_{AB}$

   $$\vec{r}_{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{pmatrix} 0.2t^2 - 1.2t \\ -0.5t + 5 \\ -0.05t \end{pmatrix}$$

Calcul de sa norme en fonction de t :

$$||\vec{r}_{AB}|| = \sqrt{(0.2t^2 - 1.2t)^2 + (-0.5t + 5)^2 + (-0.05t)^2}$$

Si on cherche la distance minimum entre les drones, on cherche le minimum de la norme du vecteur $\vec{r}_{AB}$. On dérive donc la norme du vecteur par raport au temps. Et on résout $\frac{d||\vec{r}_{AB}||}{dt} = 0$. Si on doit réaliser le calcul à la main, il est plus simple de considérer $||\vec{r}_{AB}||^2$, car la racine carrée ne change pas le minimum de la fonction et dériver un polynôme est plus simple que de dériver un polynôme dans une racine carrée.

Cela permet de trouver pour quel temps la distance est minimum. Il ne reste plus qu'à injecter ce temps dans la norme de $\vec{r}_{AB}$ pour connaitre cette distance.

On peut aussi résoudre ce problème de manière graphique : on trace la distance entre les drones en fonction du temps et on peut en déduire pour quel temps cette distance est minimale.

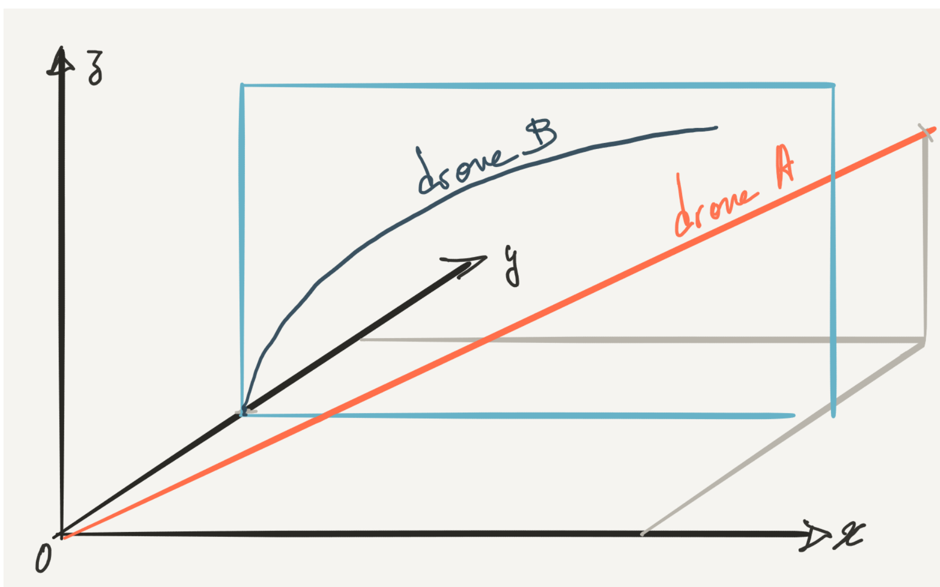


FIGURE 1 – Trajectoires schématisées des drones

Solution 2

1. $$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40\sin(0.2t) \\ 40\cos(0.2t) \\ 3 \end{pmatrix}$$

   L'unité étant évidemment des m·s^{-1}.

   $$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x(t) \\ a_y(t) \\ a_z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8\cos(0.2t) \\ -8\sin(0.2t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

   L'unité étant évidemment des m·s^{-2}.

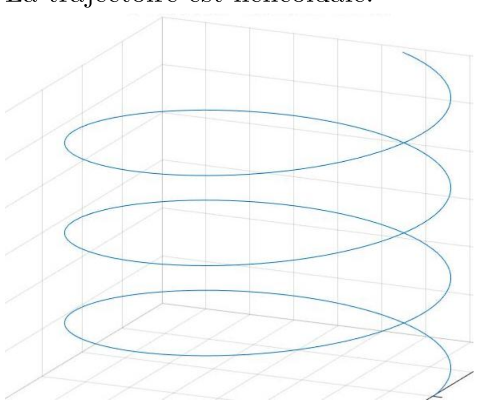
   La vitesse scalaire et l'accélération scalaire sont données par les norme des vecteurs vitesse et accélération respectivement :

   $$||\vec{v}|| = \sqrt{1600\sin^2(0.2t) + 1600\cos^2(0.2t) + 9} = \sqrt{1600 + 9} \approx 40.1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

   $$||\vec{a}|| = \sqrt{64\sin^2(0.2t) + 64\cos^2(0.2t) + 0} = \sqrt{64} = 8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

2. Seule la coordonnée z nous intéresse : nous cherchons t tel que $z(t) = 2000$, soit $t = \frac{1400}{3}$ qui font 467 s.

3. La trajectoire est hélicoïdale.

4. L'axe z des coordonnées cylindriques doit être aligné avec l'axe de l'hélice, ce qui n'est pas le cas de l'axe Oz des coordonnées cartésiennes. Ainsi, le système de coordonnées cylindriques doit être centré en $A = (100, 500, 0)$. Les coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) évoluent de la manière suivante :

   $$\rho(t) = 200 \text{ m}, \quad z(t) = 3t + 600, \quad \varphi(t) = \omega t \tag{1}$$

   La valeur de la vitesse angulaire ω apparaît directement dans les fonctions trogonométriques sin et cos de l'expression de la trajectoire, à savoir $\omega = 0.2$ rad s^{-1}.

Solution 3

1. La vitesse angulaire, en radians/s s'obtient à partir du nombre de tours par minute :

$$\omega_m = \frac{2\pi N_m}{60}$$

2. Dans un mouvement circulaire $v = R\omega$

$$v_m = \frac{2\pi R N_m}{60}$$

3. Dans un mouvement circulaire $a_n = R\omega^2$

$$a_n = R\Big[\frac{2\pi N_m}{60}\Big]^2$$

4. $\omega_m = 1571\text{rad/s}\,;\ v_m = 314\text{m/s}\,;\ a_n = 4.5 \times 10^5\text{m/s}^2$
5. La centrifugeuse met N_f tours donc $\theta_m = 2\pi N_f$ radians pour atteindre sa vitesse max, avec une accélération angulaire α constante.
   On a donc

$$\omega = \alpha t$$
$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

   à t_m elle a atteint sa vitesse max, et elle a parcouru θ_m. Cela nous donne deux équations pour trouver α en éliminant t_m

$$\omega_m = \alpha t_m$$
$$\theta_m = \frac{1}{2}\alpha t_m^2$$

$$\omega_m^2 = \alpha^2 t_m^2$$

$$t_m^2 = \frac{\omega_m^2}{\alpha^2}$$

$$\theta_m = 2\pi N_f = \frac{1}{2}\alpha\frac{\omega_m^2}{\alpha^2}$$

$$\alpha = \frac{\omega_m^2}{4\pi N_f} = \frac{4\pi^2 N_m^2}{4 \times 60^2 \pi N_f} = \frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f}$$

6.
$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(R\omega)}{\mathrm{d}t} = R\alpha = \frac{R\pi N_m^2}{60^2 N_f}$$

7. Il faut exprimer séparément ces grandeurs dans la phase d'accélération, et dans la phase ou la vitesse angulaire est constante.
   – entre 0 et t_m

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f} t$$

$$\vec{v} = R\frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f} t\vec{\tau}$$

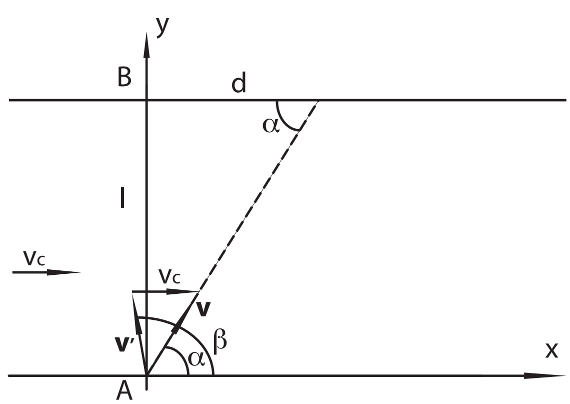
$$\vec{a} = R\omega^2\vec{n} + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau} = R\Big[\frac{\pi N_m^2}{60^2 N_f} t\Big]^2\vec{n} + \frac{R\pi N_m^2}{60^2 N_f}\vec{\tau}$$

– après t_m

$$\vec{v} = R\omega_m\vec{\tau} = R\frac{2\pi N_m}{60}\vec{\tau}$$

$$\vec{a} = R\omega_m^2\vec{n} = R\Big[\frac{2\pi N_m}{60}\Big]^2\vec{n}$$

Solution 4



vitesse du courant : $\vec{v}_c$
vitesse par rapport au courant : $\vec{v}'$ avec $|\vec{v}'| = v'$ connu (v_{rame})
vitesse par rapport à la rive : $\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_c$

Composantes des vitesses :

$$\vec{v}_c = \begin{pmatrix} v_c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_x = v\cos\alpha \\ v_y = v\sin\alpha \end{pmatrix} \qquad \vec{v}' = \begin{pmatrix} v'\cos\beta \\ v'\sin\beta \end{pmatrix}$$

Il vient :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_c + v'\cos\beta \\ v'\sin\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\tan\alpha = \frac{v\sin\alpha}{v\cos\alpha} = \frac{v'\sin\beta}{v_c + v'\cos\beta} = \frac{l}{d}$$

Donc :

$$\boxed{d = l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}}$$

Le temps de course sur la rive est donc donné par

$$t_c = \frac{d}{v_{course}} = l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}\frac{1}{v_{course}}$$

Le temps de traversée est donné par :

$$t_t = \frac{l}{v'\sin\beta}$$

Le temps total est donc :

$$\boxed{t_{tot} = \frac{l}{v'\sin\beta} + l\frac{v_c + v'\cos\beta}{v'\sin\beta}\frac{1}{v_{course}} = l\left[\frac{v_{course} + v_c + v'\cos\beta}{v_{course}\cdot v'\sin\beta}\right]}$$

On cherche à minimiser en fonction de β :

$$\frac{\mathrm{d}t_{tot}}{\mathrm{d}\beta} = l\cdot\frac{-v_{course}v'\sin\beta\cdot v'\sin\beta - v_{course}v'\cos\beta\left[v_{course} + v_c + v'\cos\beta\right]}{\left[v_{course}\cdot v'\sin\beta\right]^2} = f(\beta)$$

et on cherche $f(\beta) = 0$.

$$\begin{aligned} -v'^2 v_{course}\sin^2\beta - v' v_{course}^2\cos\beta - v_c v' v_{course}\cos\beta - v_{course}v'^2\cos^2\beta &= 0 \\ \left(\cancel{v'} v_{course}^{\cancel{2}} + v_c\cancel{v'}\cancel{v_{course}}\right)\cos\beta + v'^{\cancel{2}}\cancel{v_{course}} &= 0 \\ \left(v_{course} + v_c\right)\cos\beta + v' &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{\cos\beta = \frac{-v'}{v_c + v_{course}}}$$

A.N. : $\beta = 1.98$ (équivalent à 113.2°, soit 23.2° vers l'amont). Le temps de course sera alors de 80.5 s et la traversée de 1160 s, soit un temps total de 1241.5 s (20.7 min).