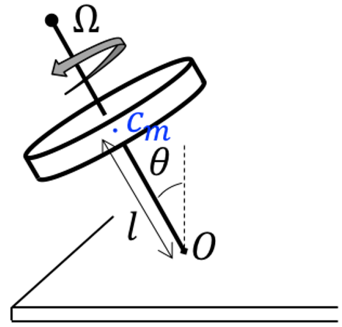
Exercices

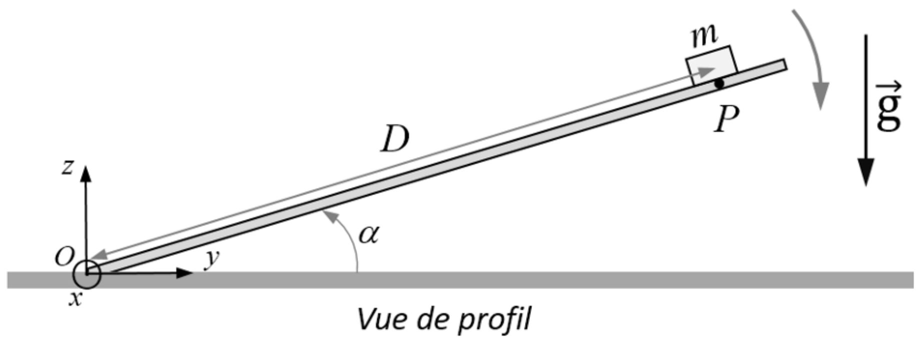
Exercice 1 Réaction du sol sur une toupie

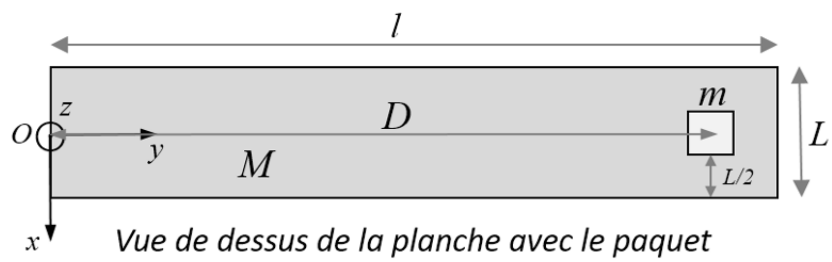


Une toupie de masse m tourne sur le sol, à une vitesse angulaire Ω élevée. Son point de contact avec le sol O est fixe. L'axe de la toupie est animé d'un mouvement de précession, à la vitesse angulaire $\omega_p = \frac{mgl}{I\Omega}$ ou l est la distance entre O et le centre de masse c_m de la toupie et I son moment d'inertie autour de son axe. La toupie tourne dans le sens indiqué par le vecteur $\vec{\Omega}$.

1. Quelles sont les forces appliquées sur la toupie ?
2. Tracez le moment cinétique de la toupie sur le schéma.
3. Montrez dans quel sens a lieu le mouvement de précession.
4. Appliquez Newton au centre de masse et déduisez-en les composantes de la force de réaction du sol.

Exercice 2 *Planche et Paquet*
Soit une planche de masse M de longueur l, de largeur L et d'épaisseur négligeable. Cette planche peut pivoter sans frottement autour d'un axe fixe selon Ox. On pose un paquet de masse m sur cette planche à la distance D du point O et au milieu par rapport aux bords extérieurs longitudinaux (selon schéma). Ce paquet est considéré comme un objet ponctuel. Initialement, la planche est horizontale.





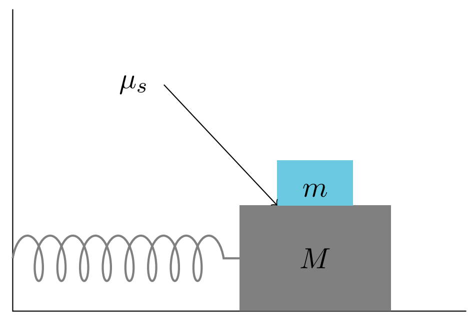
1. Déterminez à quelle distance d_G du point O se trouve le centre de masse du système « planche + paquet »
2. Exprimez le moment d'inertie I_O du système « planche + paquet » pour une rotation autour d'un axe de rotation selon Ox.

On incline la planche d'un angle α par rapport au sol (horizontal). L'angle α est inférieur à l'angle de décrochage ; par conséquent le paquet ne glisse pas à cause des frottements secs. Puis, dans un second temps, on lâche la planche ($t = 0$).

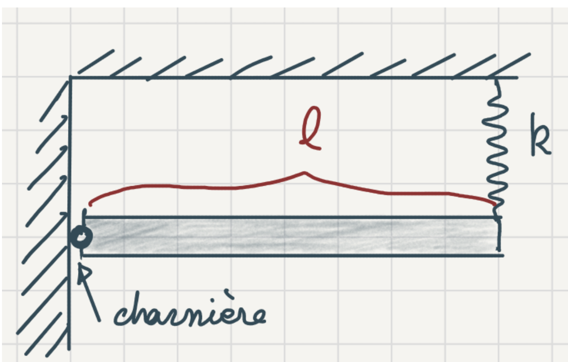
3. Calculez l'accélération angulaire $\dot{\omega}$ à $t = 0$ du système « planche + paquet » en fonction de I_O, m, M, g, et α.
4. En déduire la composante a_z à $t = 0$ suivant Oz de l'accélération du point P où repose le paquet.
5. Quelle est la condition sur α pour que le paquet reste sur la planche à $t = 0$? On exprimera cette condition en fonction de D, M, l et m.

Exercice 3 *Il faut pas décrocher !*
Une masse M est fixée à un ressort et peut glisser sans frottement sur le sol horizontal. Elle effectue donc des oscillations harmoniques simples à une fréquence f.
Au dessus, un bloc de masse m est posé et des frottements secs sont présents entre les masses m et M avec un coefficient de frottements statique μ_s.

Quelle est l'amplitude maximale des oscillations que le système peut avoir pour que le bloc de masse m ne glisse pas sur le bloc de masse M ?



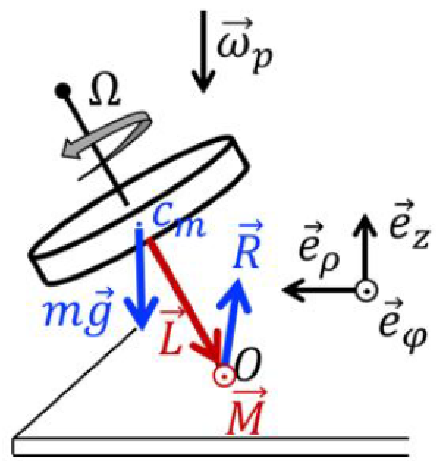
Exercice 4 *Tout est en règle*



Une règle homogène de longueur l et de masse M est fixée par une de ses extrémités à une charnière et par l'autre à un ressort de raideur k.
Le montage est fait de telle sorte que lorsqu la barre est immobile, elle est horizontale.
Déterminer la fréquence de son léger mouvement d'oscillations à la verticale.

Solutions

Corrigé exercice 1



1. La toupie est soumise à son poids $m\vec{g}$ appliqué au centre de masse et à la force de réaction du sol $\vec{R}$ appliquée en O. ($\vec{R}$ a une composante horizontale, comme on le verra en d).
2. Le moment cinétique de la toupe est $\vec{L} = I\vec{\Omega}$. $\vec{L}$ a la même direction que $\vec{\Omega}$: il pointe vers le bas puisque la toupie tourne dans le sens horaire quand on la regarde de dessus. *(Autre argument : règle du tire-bouchon)*
3. Le moment des forces en O est $\vec{M} = \vec{Oc_m} \times m\vec{g} + \underbrace{\vec{OO} \times \vec{R}}_{=0}$. C'est un vecteur perpendiculaire à la feuille dirigé vers nous, on le voit en faisant le produit vectoriel avec la main.

   Note : le calcul dans la base $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\varphi, \hat{e}_z)$ donne $\vec{M} = l(\sin\theta\hat{e}_\rho + \cos\theta\hat{e}_z) \times -mg\hat{e}_z = lmg\sin\theta\hat{e}_\varphi$. Mais nous n'avons besoin que de la direction de $\vec{M}$ pour répondre à la question , ce calcul n'est pas nécessaire.

   Le théorème du moment cinétique en O est $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$, soit un vecteur $\vec{L}$ qui pointe de plus en plus vers nous en tournant, ie la toupie s'éloigne de nous. Ceci correspond à un mouvement de précession dans le sens horaire, $\vec{\omega_p}$ pointe vers le bas.
4. Le centre de masse de la toupie suit le mouvement de précession, c'est à dire qu'il a un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe vertical passant par O à vitesse angulaire ω_p. Son accélération est donc l'accélération centripète

   $$\vec{a} = -l\sin\theta\omega_p^2\hat{e}_\rho$$

   et la deuxième loi de Newton s'écrit :

   $$-ml\sin\theta\omega_p^2\hat{e}_\rho = -mg\hat{e}_z + \vec{R} \Rightarrow \vec{R} = mg\hat{e}_z - ml\sin\theta\omega_p^2\hat{e}_\rho = mg\hat{e}_z - \frac{m^3g^2l^3}{I^2\Omega^2}\sin\theta\hat{e}_\rho$$

   On voit qu'outre la réaction normale opposée au poids, la force de réaction a une composante centripète. Notons tout de même que cette composante est faible : elle est proportionelle à $\frac{1}{\Omega^2}$ avec $\Omega >> 1$.

Corrigé exercice 2

1. Le centre de masse de la planche est à la distance $l/2$ du point O, celui du paquet à D. La distance au point O du centre de masse du système « planche + paquet » est donnée par la loi de composition des centres de masse :

$$d_{cm} = \frac{1}{M+m}(M\frac{l}{2} + mD)$$

2. Le moment d'inertie I du système « planche + paquet » est la somme des deux moments, pris sur Ox. Celui du paquet est $I_{pa} = mD^2$ (objet ponctuel).
   On doit utiliser le théorème de Steiner pour exprimer celui de la planche I_{pl} :

$$I_{pl} = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 = \frac{1}{3}Ml^2$$

   Finalement :

$$I_{Ox} = \frac{1}{3}Ml^2 + mD^2$$

3. On applique le théorème du moment cinétique pour une rotation autour de Ox.
   Moment du poids (le moment de la réaction s'annule) :

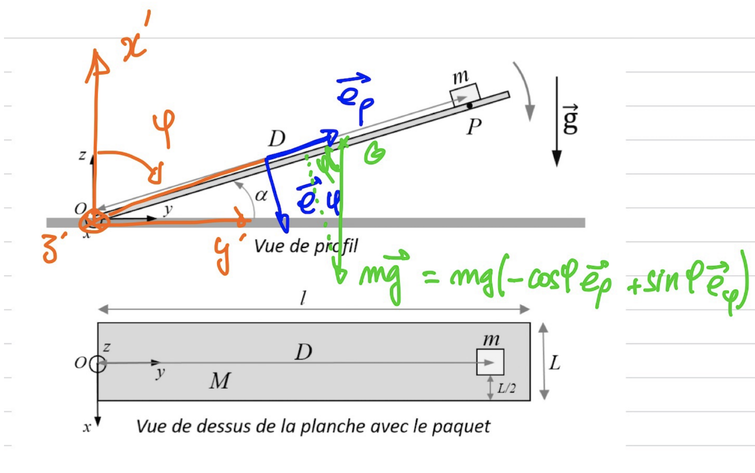
$$\vec{M}_O^{m\vec{g}} = \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} = (d_{cm}\cos\alpha\vec{e}_y + d_{cm}\sin\alpha\vec{e}_z) \wedge -(M+m)g\vec{e}_z = -g(Ml/2+mD)\cos\alpha\vec{e}_x$$

$$\vec{M}_O^{m\vec{g}} = \frac{d\vec{L}_0}{dt} = I_{Ox}\dot{\omega}\vec{e}_x = -g(Ml/2+mD)\cos\alpha\vec{e}_x$$

   Avec ω la vitesse angulaire selon (Ox).Dans l'évolution temporelle, l'angle α évolue au cours du temps, c'est cela qui donne l'équation différentielle obtenue dans le cours. Ici, le calcul est simplifié du fait qu'on ne s'intéretsse qu'à ce qui se passe à $t = 0$.

$$\dot{\omega} = -\frac{Ml/2 + mD}{I_{Ox}}g\cos\alpha$$

4. Il y a un léger "piège" ici. Le système de coordonnées proposés ne permet pas de facilement remettre un système de coordonnées polaires, il faut trouver soi même comment astucieusement poser ces coordonnées pour bien décrire le problème. On peut prendre le système suivent. Il correspond à des coordonnées cylindriques vues de dessous, et quand la planche tombe, φ est une variable croissante, donc $\omega = \dot{\varphi}$



Le point où est posé le paquet décrit un mouvement circulaire (non uniforme). Son l'accélération est donnée en coordonnées cylindriques par

$$\vec{a}_P = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Avec $\rho = D = cte$ et $\dot{\varphi} = \omega$:

$$\vec{a}_P = -D\omega^2\vec{e}_\rho + D\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$$

La planche est lâchée sans vitesse initiale (et on s'intéresse à $t = 0$), $\omega(t = 0) = 0$

$$\vec{a}_P = D\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_P \cdot \vec{e}_z = D\dot{\omega}\,\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_z = D\dot{\omega}(-\cos\alpha) = -D\frac{Ml/2 + mD}{I_{Ox}} g\cos^2\alpha$$

5. Pour que le paquet reste sur la planche à $t = 0$, il faut que $|a_z < g|$

$$D\frac{Ml/2 + mD}{I_{Ox}} g\cos^2\alpha < g$$

$$\frac{\frac{MlD}{2} + mD^2}{\frac{1}{3}Ml^2 + mD^2}\cos^2\alpha < 1$$

Corrigé exercice 3

Lorsque le bloc m est en mouvement sans pour autant tomber du bloc M, il se déplace selon un mouvement harmonique de même fréquence f et la même amplitude que le bloc M. Il est simplement soumis à la force de frottement en plus.

Mettons nous dans le cas où le bloc m est dans un cas extrême, sur le point de glisser au moment où le sens du mouvement change.

La deuxième loi de Newton sur l'axe vertical nous donne la valeur de la force de réaction, on obtient $R = mg$. En appliquant même loi de Newton sur l'axe horizontal, on obtient

$$ma_{max} = \mu_s R = \mu_s mg$$

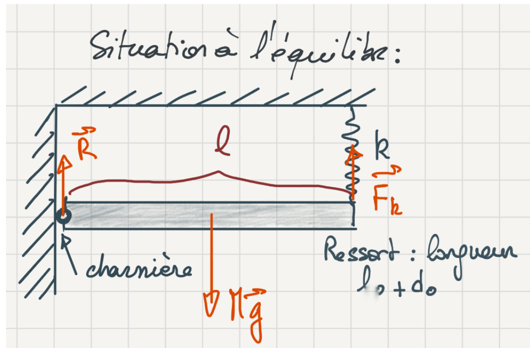
avec $a_{max} = A\omega^2$ avec A l'amplitude des oscillations et ω leur pulsation.

Dès lors, on a

$$mA\omega^2 = \mu_s mg \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{\mu_s g}{\omega^2} = \frac{\mu_s g}{(2\pi f)^2}}$$

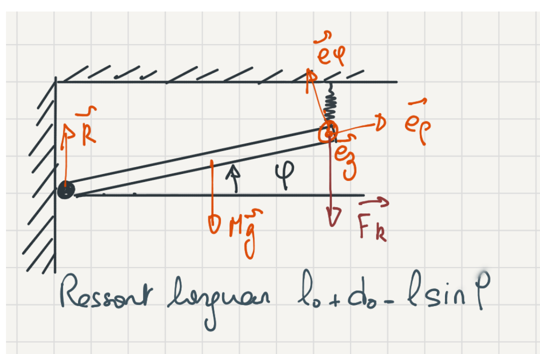
<u>Note</u> : On se place au moment où le bloc change de sens car c'est à cet endroit que l'accélération est la plus forte et donc l'endroit où le bloc est le plus susceptible de décrocher.

Corrigé exercice 4
A la position d'équilibre, la barre est horizontale. Pour maintenir la barre en place, on a la somme des moments qui vaut 0 et donc le ressort exerce une force, il n'est *pas* au repos ! Il a la longueur $l_0 + d_0$



Nous commençons par calculer l'allongement du ressort à la position d'équilibre ($\sum \vec{M}_{F_{ext}} = \vec{0}$) :

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_k = \vec{0}$$
$$\frac{l}{2}\vec{e}_y \wedge (-mg)\vec{e}_z + l\vec{e}_y \wedge kd_0\vec{e}_z = \vec{0}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}lmg = kld_0$$
$$\boxed{d_0 = \frac{mg}{2k}}$$



Calcul des oscillations autour de cet allongement :

$$\sum \vec{M}_0^{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\overrightarrow{OO} \wedge \vec{R} + \overrightarrow{OG} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_k = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{l}{2}\vec{e}_\rho \wedge (-\sin\varphi\vec{e}_\rho - \cos\varphi\vec{e}_\varphi)mg + l\vec{e}_\rho \wedge (\sin\varphi\vec{e}_\rho + \cos\varphi\vec{e}_\varphi)kx = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

avec x l'allongement du ressort par rapport à la position de repos du ressort (sans masse), soit

$$x = -l\sin\varphi + d_0$$

Finalement,

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_0^{ext} &= -\frac{l}{2}mg\cos\varphi\vec{e}_z + kl\cos\varphi(-l\sin\varphi + d_0)\vec{e}_z \\ &= \left[-\frac{l}{2}mg\cos\varphi - l^2k\cos\varphi\sin\varphi + kld_0\cos\varphi\right]\vec{e}_z = -kl^2\cos\varphi\sin\varphi\vec{e}_z\end{aligned}$$

Comme

$$\vec{L}_0 = I_0\dot{\varphi}\vec{e}_z = \frac{ml^2}{3}\dot{\varphi}\vec{e}_z$$

La loi des moments nous donne (avec l'approximation des petits angles) :

$$\sum \vec{M}_0^{ext} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t}$$

$$-kl^2\varphi\vec{e}_z = \frac{ml^2}{3}\ddot{\varphi}\vec{e}_z$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{3k}{m}\varphi = 0$$

Ainsi,

$$\boxed{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3k}{m}}}$$