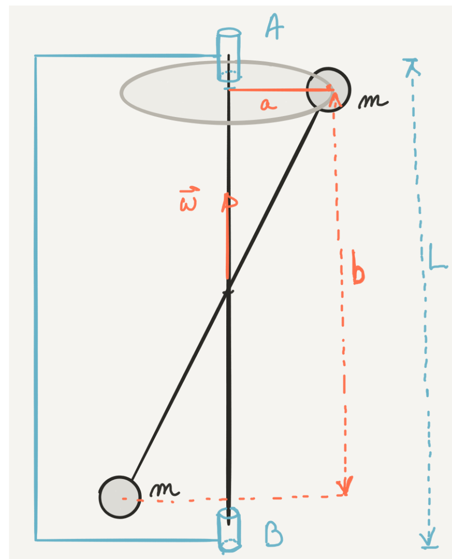
Exercices

Exercice 1 *Tiens bon la barre et tiens bon le vent*
La barre verticale de la figure ci-dessous, maintenue à ses extrémités par des roulements à billes sans frottements, peut tourner librement autour de son axe. Deux masses égales, maintenues en place comme l'indique la figure, par des tiges rigides de masse négligeable, sont disposées symétriquement par rapport au centre de la barre.

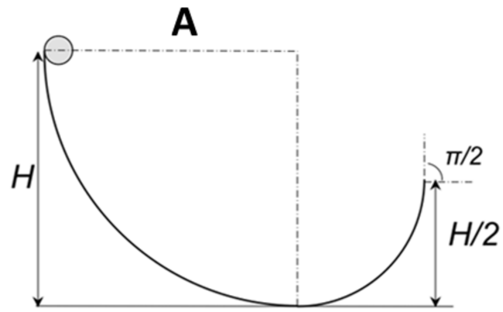


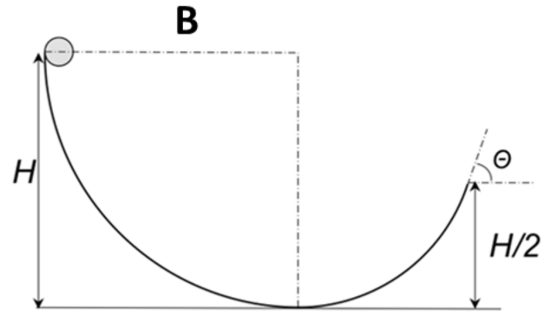
Trouver :

1. le moment cinétique du système par rapport au centre de gravité quand le système tourne avec une vitesse angulaire ω vers le haut ;
2. les forces qui s'exercent sur les roulements à billes.

Exercice 2 *Cylindre sur un tremplin*

Un cylindre plein homogène de rayon r et de masse m est lâché du haut d'un tremplin avec une vitesse initiale nulle. Le haut du tremplin est à la hauteur H et le point d'éjection à la hauteur $H/2$. On considère les deux types de tremplin (A et B) schématisés ci-dessus, et les trois cas de figure suivants :





cas 1 : le cylindre glisse sans rouler le long du tremplin A et est éjecté verticalement.
cas 2 : le cylindre roule sans glisser le long du tremplin A et est éjecté verticalement.
cas 3 : le cylindre roule sans glisser le long du tremplin B et est éjecté en formant un angle θ par rapport à l'horizontale.

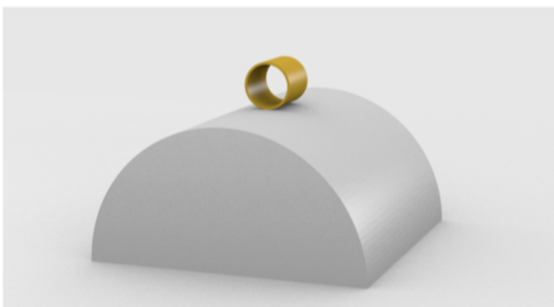
On note h_1, h_2 et h_3 les hauteurs maximales atteintes par le cylindre après son éjection du tremplin pour ces trois cas respectivement.

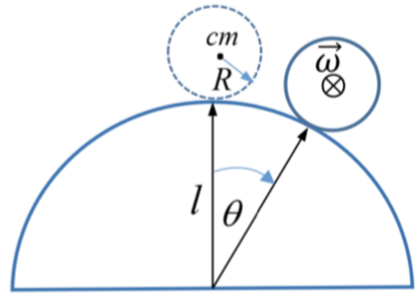
1) Classez qualitativement (sans calcul) par valeur décroissante, ou égalité s'il y a lieu, les valeurs (h_1, h_2, h_3 et H). Expliquez les raisons de ce classement.

2) Calculez quantitativement h_1, h_2 et h_3 en fonction des données du problème.

Exercice 3 *Cylindre creux qui roule puis décolle (examen 2018/2019)*

Un cylindre creux de masse m de longueur L, de rayon R et d'épaisseur négligeable repose sur un support dont la forme est un demi-cylindre de rayon l, comme indiqué sur le schéma ci-dessous. Les deux axes de symétrie des cylindres sont parallèles. Le cylindre creux est initialement immobile au sommet du support ($\theta = 0$), puis il se met à rouler sans glisser le long du support. La position du cylindre creux est repérée par l'angle θ, tel qu'indiqué sur la figure ci-dessous. On néglige les frottements de l'air. On note g l'accélération de la pesanteur.

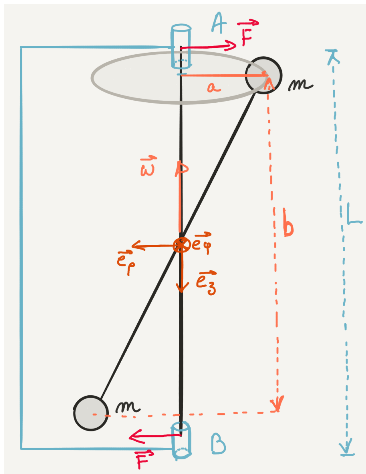




1. Démontrez que le moment d'inertie I_{cm} du cylindre creux pour une rotation autour de son axe de symétrie est $I_{cm} = mR^2$.
2. Indiquez les forces qui s'exercent sur le cylindre creux. On prendra soin de préciser leur point d'application. Dessinez ces forces sur le schéma de droite, pour la position $\theta > 0$.
3. Quel est le type de trajectoire du cylindre creux après avoir quitté le support ?
4. Calculez l'angle critique de décollage θ_c
5. Déterminez l'équation différentielle du mouvement du cylindre creux selon θ, pour $\theta < \theta_c$ (pendant qu'il roule sans glisser sur le support). Exprimez cette équation en fonction de R, l et g.
6. Si le cylindre creux glissait sans frottement (pas de rotation), l'angle critique de décollage θ_c serait-il plus grand ou plus petit ? Argumentez sans calcul.

Solutions

Corrigé exercice 1



1. On calcule le moment cinétique du solide en rotation. La barre verticale tourne autour de son axe, son moment cinétique est nul (approximation de la tige mince, toute la masse est sur l'axe). La tige en biais est sans masse, donc seules les deux masses contribuent.

   Pour les deux petites masses, on a :

$$\vec{L}_0^m = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$$

   En passant en coordonnées cylindriques (on comprendra pourquoi au point 2), nous obtenons, en commençant par la masse de gauche,

$$\vec{v} = a\omega\vec{e}_\varphi$$

   Alors,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \frac{b}{2}\vec{e}_z + a\vec{e}_\rho \\ \vec{L}_0 &= \left(\frac{b}{2}\vec{e}_z + a\vec{e}_\rho\right) \wedge ma\omega\vec{e}_\varphi \\ &= \frac{mab\omega}{2}\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\varphi + ma^2\omega\vec{e}_\rho \wedge \vec{e}_\varphi = -\frac{mab}{2}\omega\vec{e}_\rho + ma^2\omega\vec{e}_z\end{aligned}$$

   Pour la deuxième masse, nous avons :

$$\overrightarrow{OP}' = -\overrightarrow{OP} \text{ et } \vec{v}' = -\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OP}' \wedge m\vec{v}' = \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}$$

   Au final :

$$\boxed{\vec{L}_0 = 2ma^2\omega\vec{e}_z - mab\omega\vec{e}_\rho}$$

2. Le moment extérieur est donné par

$$\sum \vec{M}_0^{\text{ext}} = \frac{\mathrm{d}\vec{L}_0}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-mab\omega\vec{e}_\rho + 2ma^2\omega\vec{e}_z\right]$$

Or, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z = \vec{0}$ car $\vec{e}_z$ ne change pas. Par contre, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\rho = \omega\vec{e}_\varphi$. De ce fait, le moment extérieur s'exprime comme :

$$\sum \vec{M}_0^{\text{ext}} = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A + \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$$

Chacune des deux forces exerce le même moment $\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F}_B$ car $\overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA}$ et $\vec{F}_B = -\vec{F}_A$ afin d'assurer que la somme des forces est nulle (puisque le centre de masse reste immobile). Donc,

$$\begin{aligned}\sum \vec{M}_0^{ext} &= 2\overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}_A = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi \\ &= 2\left(-\frac{L}{2}\vec{e}_z\right) \wedge (-F)\vec{e}_\rho = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi \\ &= LF\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = -mab\omega^2\vec{e}_\varphi\end{aligned}$$

en se rappelant que $\vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \vec{e}_\varphi$, on a

$$F = -\frac{mab\omega^2}{L}$$

L'intensité de F est donc donnée par $F = \dfrac{mab\omega^2}{L}$.
F est la <u>force exercée par les roulements à bille</u> sur la barre. Donc la force exercée sur les roulements est $-F\vec{e}_\rho$ La force exercée sur le roulement due à la rotation est donc :

$$\boxed{F = \frac{mab}{L}\omega^2}$$

Remarque : On constate que le moment cinétique n'est pas forcément parallèle au vecteur rotation. Ce n'est le cas que si le solide est "équilibré" c.a.d. il tourne autour d'un axe principal d'inertie.

Corrigé exercice 2

Comme remarque préliminaire, remarquons que la condition de glissement sans roulement implique que le système n'est pas soumis aux frottements. En effet, supposons "par l'absurde" la présence d'une force de frottements. Le moment de force total vaut $\vec{M}_O^{\text{tot}} = \vec{M}_O^{F_f} = \vec{OP} \wedge \vec{F}_f \neq 0$. Or, comme $\vec{M}_O^{\text{tot}} = \frac{d\vec{L}}{dt} = I_O\dot{\vec{\omega}} \neq 0$, alors le cylindre se met à tourner ce qui est contraire à l'hypothèse de glissement sans roulement.

1. $H = h_1 > h_2 > h_3$
   - Cas (1) : Le cylindre n'entre pas en rotation pendant son trajet sur le tremplin. Son énergie cinétique est donc uniquement celle de son centre de masse. Etant éjecté verticalement, il est totalement à l'arrêt lorsqu'il atteint la hauteur h_1 (sa vitesse n'a pas de composante horizontale). La conservation de l'énergie mécanique impose donc $h_1 = H$.
   - Cas (2) : Comme le cylindre roule, il arrive au bout du tremplin avec une énergie de translation et de rotation. Il continue à tourner sur lui-même lors de sa trajectoire verticale après éjection. Une partie de son énergie cinétique reste donc stockée dans son mouvement de rotation, ce qui impose $h_2 < h_1$.
   - Cas (3) : Puisque le point d'éjection est à la même hauteur qu'en (2) et que le cylindre roule de la même manière, la conservation de l'énergie mécanique impose que le cylindre arrive au bout du tremplin avec une vitesse de même norme que dans le cas (2). Mais cette vitesse a une composante horizontale, qui reste constante après éjection, il y a donc moins d'énergie convertible en potentiel de gravitation qu'en (2) : $h_3 < h_2$.
2. Calcul des hauteurs :
   - Cas (1) : $h_1 = H$.

     Pour 2 et 3, calculons $h_3(\theta)$, car h_2 sera donné par $h_2 = h_3(\theta = \pi/2)$:
   - Cas (3) : Rappelons que le roulement sans glissement impose une relation entre la vitesse du centre de masse et la vitesse de rotation du cylindre, que l'on retrouve en exprimant le fait que la vitesse du point de contact est nulle : $\omega_3 = -v_3/r$.

     L'énergie cinétique au point d'éjection est la somme de l'énergie cinétique du centre de masse et de l'énergie cinétique de rotation :

     $$E_{C,3} = \frac{1}{2}m|v_3|^2 + \frac{1}{2}I_\Delta\omega_3^2 = \frac{1}{2}m|v_3|^2 + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}mr^2)\Big(\frac{|v_3|}{r}\Big)^2 = \frac{3}{4}m|v_3|^2$$

     Conservation de l'énergie mécanique entre le point de départ et le point d'éjection :

     $$\frac{1}{2}mgH = \frac{3}{4}m|v_3|^2$$

$$|v_3| = \sqrt{\frac{2}{3}gH}$$

Pour obtenir la hauteur atteinte, il faut prendre la composante verticale de la vitesse : $v_3 \sin\theta$. La hauteur au dessus du point d'éjection h'_3 est obtenue par conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{1}{2}m(v_3 \sin\theta)^2 = mgh'_3$$

$$h'_3 = \frac{v_3^2 \sin^2\theta}{2g} = \frac{2gH\sin^2\theta}{3\cdot 2g} = \frac{1}{3}H\sin^2\theta$$

$$h_3 = \frac{1}{2}H + h'_3 = H(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\sin^2\theta)$$

— le cas (2) est obtenu avec $\theta = \pi/2$ donc

$$h_2 = H(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = \frac{5}{6}H$$

Corrigé exercice 3

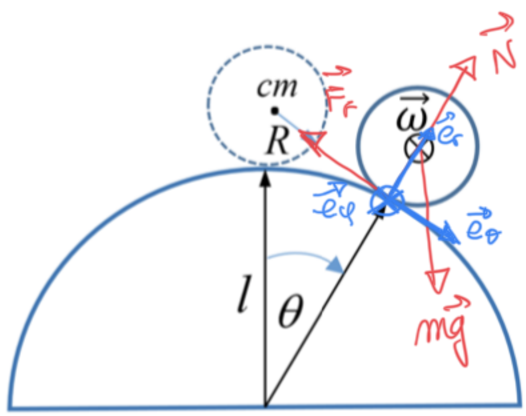
1. On pose : Comme c'est un cylindre creux, route la masse est à la même distance R de l'axe de symétrie. Le moment d'inertie vaut donc

$$I_{\text{cm}} = \sum_i m_i r_i^2 = R^2 \sum_i m_i = mR^2$$

2. **Au centre de masse :** poids $m\vec{g}$

   Au point de contact A : Réaction normale $\vec{N}$ et force de frottements $\vec{F_F}$.

   Le cylindre creux roule sans glisser jusqu'à un angle critique θ_c, puis il «décolle». Il n'est alors plus en contact avec le support.



3. Parabolique ou uniformément accéléré ($\vec{g}$).
4. On trouve $\theta_c = \frac{\pi}{3}$ ou $\theta_c = \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$. Voyons comment obtenir ce résultat.
   La symétrie impose un système de coordonnées cylindriques ou sphériques. Choissons de travailler avec des coordonnées sphériques. Ici, $\varphi = cte = 0$ et $r = cte$.

$$\vec{F_F} = -F_F \hat{e}_\theta \qquad \vec{N} = N\hat{e}_r \qquad m\vec{g} = -mg\cos\theta\hat{e}_r + mg\sin\theta\hat{e}_\theta$$

   Pour calculer l'angle critique de décollage θ_c :
   - Condition pour le « décollage » : $N = 0$
   - Newton selon $\vec{e_r}$ au point de décollage :

$$-m(l+R)\dot{\theta_c}^2 = -mg\cos\theta_c + N \Rightarrow \dot{\theta_c}^2 = \frac{g\cos\theta_c}{l+R}$$

   Cette équation ne nous permet pas de déterminer directement θ_c. Nous avons besoin d'une deuxième condition.

— Conservation de l'énergie mécanique pour exprimer $\dot{\theta_c}^2 = f(\theta)$:
Équation de liaison entre ω et $\dot{\theta}$. En notant A le point de contact du cylindre creux, $v_A = 0$ à cause du roulement sans glissement :

$$v_A = v_{cm} + v_{A/cm} \Longrightarrow (l+R)\dot{\theta} - R\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{l+R}{R}\dot{\theta}$$

Énergie potentielle :

$$E_p = mgh_{cm} = mg(l+R)(\cos\theta - 1)$$

(ici choisie telle que $E_p(\theta = 0) = 0$)
Énergie cinétique translation + rotation :

$$E_c = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I_{cm}\omega^2 = \frac{1}{2}m((l+R)\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}mR^2\left(\frac{l+R}{R}\dot{\theta}\right)^2 = m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Énergie mécanique :

$$E_m = E_p + E_c = mg(l+R)(\cos\theta - 1) + m(l+R)^2\dot{\theta}^2$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m = cte = E_m(\theta = 0) = 0 \Rightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{g(1-\cos\theta)}{l+R}$$

Finalement, la deuxième condition sur θ_c est :

$$\dot{\theta_c}^2 = \frac{g\cos\theta_c}{l+R}$$

avec

$$\dot{\theta_c}^2 = \frac{g(1-\cos\theta_c)}{l+R} \Rightarrow \frac{g(1-\cos\theta_c)}{l+R} = \frac{g\cos\theta_c}{l+R} \Rightarrow \cos\theta_c = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta_c = \arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

5.

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

— Newton : selon $\vec{e_\theta}$: $m(l+R)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - F_F$

— Theoreme du moment cinetique au centre de masse :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{M}_{cm,F_F} \Rightarrow = RF_F\vec{e_\varphi} \Rightarrow F_F = mR\dot{\omega}$$

$$\Rightarrow m(l+R)\ddot{\theta} = mg\sin\theta - mR\dot{\omega}$$

Avec l'équation de liaison :

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

— Autre méthode : On peut appliquer le théorème du moment cinétique en A (car $\vec{v}_A \parallel \vec{v}_{cm}$)
Theoreme du moment cinetique en A :

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_{A,mg} \Rightarrow I_A\dot{\omega}\vec{e_\varphi} = Rmg\sin\theta\vec{e_\varphi}$$

Avec Steiner :

$$I_A = mR^2 + I_{cm} = 2mR^2 \Rightarrow \dot{\omega} = \frac{g}{2R}\sin\theta$$

Et avec l'équation de liaison :

$$\dot{\omega} = \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} \Rightarrow \frac{l+R}{R}\ddot{\theta} = \frac{g}{2R}\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = \frac{g}{2(l+R)}\sin\theta$$

6. θ_c serait plus petit car le cylindre irait plus vite (il y aurait moins d'inertie due à la rotation).