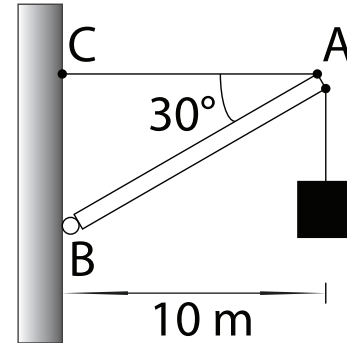


Exercices

Exercice 1 *Ambiance tendue au bistrot*

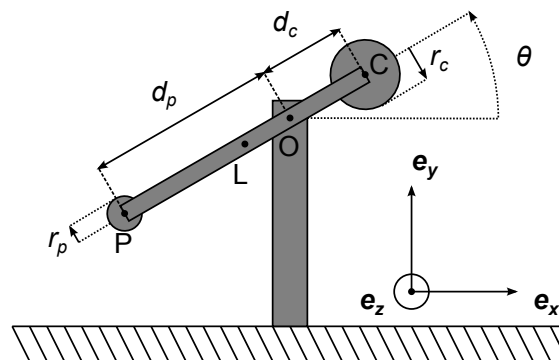
Une enseigne de bistrot est accrochée comme montré sur le schéma ci-contre. Une poutre d'épaisseur nulle et de longueur AB est libre de pivoter autour de B . Un câble relie les points C , A et l'enseigne et les stabilise. Les câbles sont de masse négligeables et la masse de la poutre et de l'enseigne sont 15 kg et 300 kg respectivement.

Trouvez les forces \vec{F}_B et \vec{F}_C agissant sur B et C respectivement.



Exercice 2 *Être catapulté au centre du problème*

On se propose d'étudier la dynamique de la catapulte représentée sur la figure ci-dessous.



La catapulte est constituée d'un levier assimilé à une tige mince homogène de masse m_l fixé à un support au point O . Le projectile est une boule pleine de masse m_p et de rayon r_p fixée à l'extrémité P du levier à une distance d_p de l'axe de rotation. Une boule pleine de masse m_c et de rayon r_c placée à l'autre extrémité C à une distance d_c de l'axe de rotation sert de contre-poids permettant d'actionner la catapulte. L'angle θ est défini comme étant l'angle entre l'horizontale \hat{e}_x et le vecteur \vec{OC} . On suppose qu'un mécanisme permet d'éjecter le projectile quand l'angle θ_e atteint la valeur désirée.

1. Placer sur la figure les forces agissant sur la catapulte.
2. Calculer les moments d'inertie par rapport à l'axe de rotation pour le projectile (I_O^p), le contre-poids (I_O^c) et le levier (I_O^l)? En déduire le moment d'inertie global I_O du système projectile+contre-poids+levier.

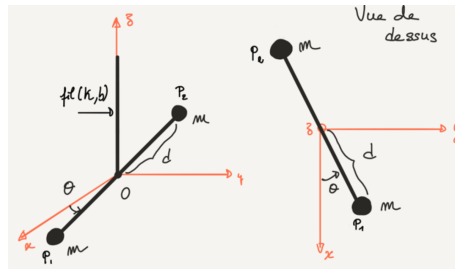
3. Quelle condition doit-on avoir entre m_c , d_p , m_p , d_c et m_l pour faire fonctionner la catapulte ?
4. Donner l'équation différentielle sur $\theta(t)$ qui permet de décrire le mouvement de la catapulte en utilisant le moment d'inertie global I_O du système.
5. Donner la vitesse du projectile en fonction de l'angle d'éjection, sachant que l'angle initiale $\theta(t = 0) = \theta_0$ et que la vitesse angulaire initiale est nulle.

Exercice 3 *Balance ton Cavendish. Examen 2019*

La balance de Cavendish est un instrument permettant de déterminer expérimentalement la constante de gravitation G . Elle est constituée de deux points matériels P_1 et P_2 de même masse m reliés par une tige sans masse à un fil, formant un pendule de torsion. Deux grosses sphères de masse M , S_A et S_B , peuvent être placées de manière à faire dévier le pendule dans un sens ou dans l'autre par l'effet de la gravitation.

Partie 1 : Etude du pendule de torsion

Les masses P_1 et P_2 sont reliées par une tige sans masse de longueur $2d$, et contraintes de tourner autour de O dans le plan horizontal (O, x, y) .

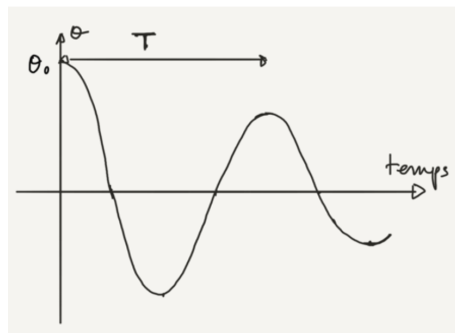


- a) Calculer le moment d'inertie I_O du pendule de torsion par rapport à l'axe (Oz)

Le fil est caractérisé par deux constantes, κ et b , définies comme suit :

- le fil exerce un moment élastique dépendant de l'angle de déviation θ , donné par $\vec{M}_O^e = -\kappa\theta\vec{e}_z$
- et les frottements internes du fil exercent le moment $\vec{M}_O^f = -b\dot{\theta}\vec{e}_z$

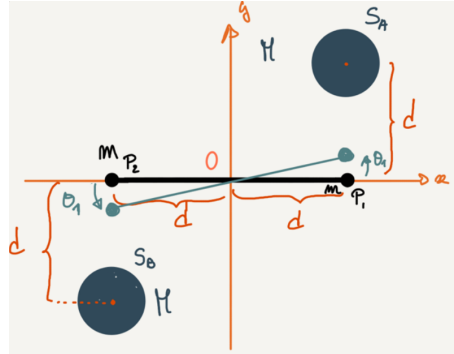
On écarte le pendule de sa position d'équilibre de l'angle θ_0 et on le lâche sans lui communiquer de vitesse angulaire. On mesure l'angle de déviation en fonction du temps et on observe des oscillations décroissantes avec une pseudo période T (voir ci-contre)



- b) Etablir l'équation différentielle du mouvement sur la variable θ .
- c) Quelle est la pulsation propre du pendule de torsion ?
- d) Donner la forme générale de la solution de l'équation différentielle sans calculer les constantes d'intégration. Expliciter la pseudo-période et le facteur d'amortissement en fonction des données du problème.
- e) On suppose l'amortissement très faible ($b \approx 0$) et on mesure T . Déterminer κ en fonction de T, m et d .

Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

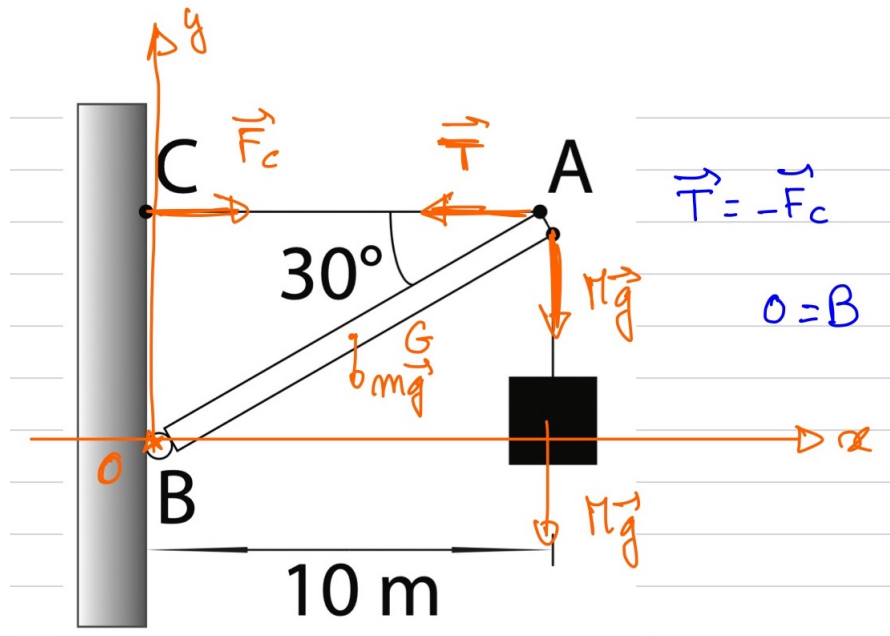
On amène les deux grosses sphères (S_A, S_B) de masse M , en regard des masses ponctuelles (P_1, P_2) à une distance d de l'axe Ox , et on laisse le pendule s'équilibrer avec l'angle de déviation θ_1 . On suppose l'angle θ_1 très faible ($\theta \ll 1$).



- Exprimer (vectoriellement) le moment $\vec{M}_{O,1}^{tot}$, par rapport à O sur le pendule, lié à la force de gravitation de S_A sur P_1 et de S_B sur P_2 .
- Exprimer (vectoriellement) le moment $\vec{M}_{O,2}^{tot}$ lié à la force de gravitation de S_A sur P_2 et de S_B sur P_1 .
- Montrer que pour un calcul d'ordre de grandeur, on peut négliger $\|\vec{M}_{O,2}^{tot}\|$ devant $\|\vec{M}_{O,1}^{tot}\|$.
- Exprimer l'angle θ_1 à l'équilibre en fonction de G, M, m, d et κ .
- Déduire l'expression de G en fonction de M, m, d, T et θ_1 , grandeurs qui sont connues ou facilement mesurables.
- Question subsidiaire (ne faisait pas partie de l'examen) : Utiliser les données de l'expérience pour évaluer l'ordre de grandeur de G . La période T fait 8 minutes, $M = 1.5$ kg, $m = 15$ g, $d = 5$ cm, et on mesure θ_1 grâce à la déviation du faisceau laser, soit 20 cm sur les 13,5 m de l'amphi

Solutions

Corrigé exercice 1



Écrivons les deux critères de stabilité statique, en appelant \vec{F}_A , \vec{F}_B et \vec{F}_C les forces résultantes qui s'appliquent aux points respectifs A, B et C, et $m\vec{g}$ le poids de la poutre qui s'applique en son centre de gravité, G situé à mi-chemin de B et A. On prend comme système la poutre. Le câble applique en A une tension \vec{T} égale à $-\vec{F}_C$. On place l'origine O au point B, et on définit un axe (Ox) horizontal et un axe (Oy) vertical.

Les conditions d'équilibre $\sum \vec{M}_O = \vec{0}$ et $\sum \vec{F} = \vec{0}$ s'écrivent :

$$\vec{F}_A + \vec{F}_B + \vec{T} + \vec{F}_D = \vec{0} \quad (1)$$

$$\vec{O}\vec{O} \wedge \vec{F}_B + \vec{O}\vec{A} \wedge (M\vec{g}) + \vec{O}\vec{A} \wedge \vec{T} + \vec{O}\vec{G} \wedge (m\vec{g}) = \vec{0} \quad (2)$$

Soit $M = 300$ kg la masse de l'enseigne, $m = 15$ kg la masse de la poutre, la longueur $CA = 10$ m et l'angle $\alpha = 30^\circ$. La condition (1) donne :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_B^x \\ F_B^y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

La condition (2) avec

$$\overrightarrow{OA} = l(\cos \alpha \hat{e}_x + \sin \alpha \hat{e}_y)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{l}{2}(\cos \alpha \hat{e}_x + \sin \alpha \hat{e}_y)$$

$$\vec{T} = -T \hat{e}_x \quad M\vec{g} = -Mg \hat{e}_y \quad m\vec{g} = -mg \hat{e}_y = \vec{0}$$

donne

$$-Mgl \cos \alpha (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) - Tl \sin \alpha (\hat{e}_y \wedge \hat{e}_x) - mg \frac{l}{2} \cos \alpha (\hat{e}_x \wedge \hat{e}_y) = \vec{0}$$

soit

$$-Mgl \cos \alpha \hat{e}_z + Tl \sin \alpha \hat{e}_z - mg \frac{l}{2} \cos \alpha \hat{e}_z = \vec{0} \quad (4)$$

La condition (3) nous donne immédiatement

$$F_B^x = T$$

$$F_B^y = (M + m)g$$

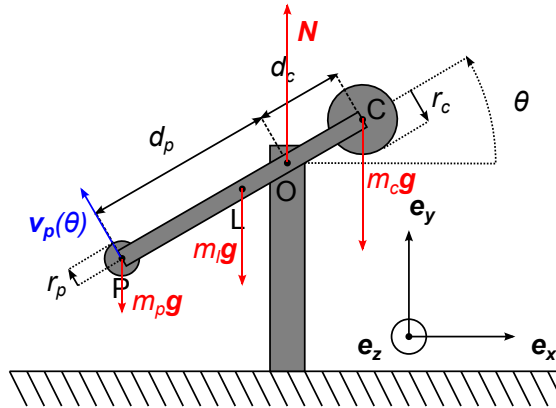
et la condition (4) fournit :

$$T = F_C = g \left(M + \frac{1}{2}m \right) \cot \alpha$$

A.N. : $F_C = 5224.9 \text{ N}$ et $F_B = 6070.3 \text{ N}$.

Corrigé exercice 2

1. Schéma avec forces :



2. Le moment d'inertie des différents objets (projectile, levier, contre-poids) est donné par rapport à leur principal axe de rotation. Pour calculer le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation O de la catapulte, il faut corriger cette valeur en utilisant le théorème de Steiner.

Moment d'inertie du projectile :
$$I_O^p = \underbrace{\frac{2}{5} m_p r_p^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_p d_p^2}_{\text{Steiner}}$$

Moment d'inertie du contre-poids :
$$I_O^c = \underbrace{\frac{2}{5} m_c r_c^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_c d_c^2}_{\text{Steiner}}$$

Moment d'inertie du levier : La longueur totale du levier est $d_p + d_c$ et la distance du centre de masse L du levier par rapport à l'axe de rotation est donnée par

$$d_l = \frac{d_p + d_c}{2} - d_c = \frac{d_p - d_c}{2}$$

et l'on a

$$I_O^l = \underbrace{\frac{1}{12} m_l (d_c + d_p)^2}_{\text{centre de masse}} + \underbrace{m_l \left(\frac{d_p - d_c}{2} \right)^2}_{\text{Steiner}}$$

Moment d'inertie du système : $I_O = I_p + I_c + I_l$

3. Pour faire fonctionner la catapulte il faut que le centre de masse du système se trouve du côté du contre-poids par rapport à l'axe de rotation, c'est-à-dire $\frac{1}{M_{\text{tot}}} \sum_i m_i r_i > 0$, ou

$$m_c d_c > m_p d_p + m_l \frac{d_p - d_c}{2}$$

4. La somme des moments de forces extérieures par rapport à l'axe de rotation vaut :

$$\begin{aligned}\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} &= \vec{OP} \wedge (m_p \vec{g}) + \vec{OC} \wedge (m_c \vec{g}) + \vec{OL} \wedge (m_l \vec{g}) + \underbrace{\vec{OO} \wedge \vec{N}}_{\vec{0}} \\ &= m_p d_p g \cos \theta \hat{e}_z - m_c L_c g \cos \theta \hat{e}_z + m_l \frac{d_p - d_c}{2} g \cos \theta \hat{e}_z \\ &= \left(m_p d_p - m_c d_c + m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right) g \cos \theta \hat{e}_z\end{aligned}$$

Le moment cinétique du système vaut :

$$\vec{L}_O = I_O \dot{\theta} \hat{e}_z$$

et sa dérivée par rapport au temps

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \ddot{\theta} \hat{e}_z$$

On posant $\sum \vec{\mathcal{M}}_O^{ext} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ on trouve

$$I_O \ddot{\theta} = \left(m_p d_p - m_c d_c + m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right) g \cos \theta$$

soit

$$\ddot{\theta} + \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right)}{I_O} g \cos \theta = 0$$

5. Résolution par la conservation de l'énergie :

En définissant l'énergie potentielle par rapport au levier en position horizontale, soit $\theta = 0$, l'énergie mécanique du système pour un angle θ quelconque est donnée par

$$E_{\text{mécanique}} = \underbrace{-m_p d_p g \sin \theta + m_c d_c g \sin \theta - m_l \frac{d_p - d_c}{2} g \sin \theta}_{\text{Energie potentielle}} + \underbrace{\frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2}_{\text{Energie cinétique}} = \text{cste} = K'$$

Initialement l'énergie mécanique vaut

$$E_{\text{mécanique}, t=0} = \left(-m_p d_p + m_c d_c - m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right) g \sin \theta_0 = K'$$

La conservation de l'énergie mécanique ($K' = K'$) nous permet alors de trouver la vitesse angulaire

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{\left(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2} \right)}{I_O} g (\sin \theta_0 - \sin \theta)}$$

Résolution alternative : Il s'agit d'une technique d'intégration fréquemment utilisée en physique.

On multiplie d'abord l'équation différentielle décrivant le mouvement de la catapulte par $\dot{\theta}$ pour faire apparaître la dérivée interne.

$$\ddot{\theta} + \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g \dot{\theta} \cos \theta = 0$$

puis on intègre

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g \sin \theta + K = 0$$

avec K une constante d'intégration que l'on détermine avec les conditions initiales $\theta(0) = \theta_0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$

$$K = - \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g \sin \theta_0$$

On trouve alors la vitesse angulaire :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g (\sin \theta_0 - \sin \theta)}$$

Dans les deux cas, la vitesse d'éjection du projectile est obtenue en multipliant la vitesse angulaire par d_p et en posant $\theta = \theta_e$: $v_p(\theta_e) = d_p \dot{\theta}$ soit

$$v_p(\theta_e) = d_p \sqrt{2 \frac{(m_c d_c - m_p d_p - m_l \frac{d_p - d_c}{2})}{I_O} g (\sin \theta_0 - \sin \theta_e)}$$

Remarque : En notant M la masse totale du système projectile+levier+contre-poids et d_G la distance du centre de gravité de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation, l'expression de la vitesse angulaire peut s'exprimer de la façon suivante :

$$\dot{\theta} = \sqrt{2 \frac{M g d_G}{I_O} (\sin \theta_0 - \sin \theta_e)}$$

Corrigé exercice 3

Partie 1 : Etude du pendule de torsion

a) $I_O = m\overline{OP_1}^2 + m\overline{OP_2}^2 = 2md^2$

b) O est un point fixe (et le centre de masse), on applique le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\vec{e}_z} + \vec{M}_O^{\vec{f}} \Rightarrow I_O\ddot{\theta}\vec{e}_z = -\kappa\theta\vec{e}_z - b\dot{\theta}\vec{e}_z \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{b}{2md^2}\dot{\theta} + \frac{\kappa}{2md^2}\theta = 0$$

c) On reconnaît l'équation d'un oscillateur amorti, $\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega_0^2\theta = 0$ où Ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur. Par identification :

$$\Omega_0^2 = \frac{\kappa}{2md^2}$$

d) D'après le graphe représentant les oscillations du pendule, il est dans un régime d'amortissement faible. Dans ce cas, la forme générale de la solution de $\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \Omega_0^2\theta = 0$ est :

$$\theta(t) = Ae^{-\gamma t} \cos(\omega t + \varphi)$$

avec γ le coefficient d'amortissement et $\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ la pseudo-pulsation. γ est obtenu par identification : $\gamma = \frac{b}{4md^2}$.

Ainsi, $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{2md^2} - \frac{b^2}{(4md^2)^2}}$

e) Pour $b \approx 0$, $\omega \approx \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\kappa}{2m}}$

On écrit la relation entre la période et la pulsation :

$$\frac{2\pi}{T} = \omega = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{\kappa}{2m}} \Rightarrow \frac{\kappa}{2m} = \frac{4\pi^2 d^2}{T^2} \Rightarrow \kappa = 8m \left(\frac{\pi d}{T}\right)^2$$

Partie 2 : Influence de la force de gravitation des 2 grosses sphères sur les deux masses ponctuelles

a) Comme $\theta_1 \ll 1$, on fait le calcul des moments avec $\theta_1 = 0$

$$\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}} = \left(d\vec{e}_x \times \frac{GMm}{d^2} \vec{e}_y \right) + \left(-d\vec{e}_x \times \frac{-GMm}{d^2} \vec{e}_y \right) = 2 \frac{GMm}{d} \vec{e}_z$$

b) Avec l'aide de Pythagore, on voit que $\overrightarrow{P_2S_A} = -\overrightarrow{P_1S_B} = d\sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y \right)$, d'où :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_{O,2}^{tot}} &= \left(-d\vec{e}_x \times \frac{GMm}{5d^2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y \right) \right) + \left(d\vec{e}_x \times -\frac{GMm}{5d^2} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \vec{e}_x + \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{e}_y \right) \right) \\ &= -\frac{2}{5\sqrt{5}} \frac{GMm}{d} \vec{e}_z \end{aligned}$$

c) $\frac{\|\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}\|}{\|\overrightarrow{M_{O,1}^{tot}}\|} = \frac{1}{5\sqrt{5}} \approx \frac{1}{5 \cdot 2} = \frac{1}{10}$. Environ 10 fois plus petit, c'est bien négligeable pour calculer un ordre de grandeur.

d) Comme c) l'indique, on ne tient pas compte de $\overrightarrow{M_{O,2}^{tot}}$. A l'équilibre, le moment total est nul en O :

$$\overrightarrow{M_O^{el}} + \underbrace{\overrightarrow{M_O^f}}_{=0} + \overrightarrow{M_{O,1}^{tot}} = 0 \Rightarrow 2 \frac{GMm}{d} = \kappa \theta_1 \Rightarrow \theta_1 = 2 \frac{GMm}{d\kappa}$$

e) On injecte 1e) dans 2d)

$$G = \frac{\theta_1 d \kappa}{2Mm} = \frac{\theta_1 d}{2Mm} \frac{8m\pi^2 d^2}{T^2} = 4 \frac{\pi^2 \theta_1 d^3}{MT^2}$$

f) On trouve $6,7 \cdot 10^{-11}$