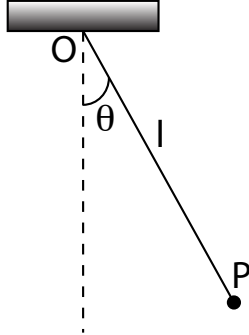


Exercices

Exercice 1

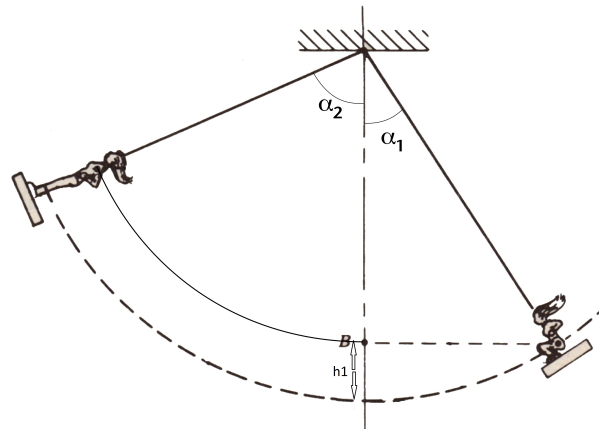


Un pendule est constitué d'une masse m accrochée au point P à un fil de masse négligeable et de longueur l . Le fil est repéré par rapport à la verticale par l'angle orienté θ . Le mouvement s'effectue sans frottements.

1. établir l'équation du mouvement en utilisant le théorème du moment cinétique. Retrouver cette équation en passant par des considérations sur l'énergie mécanique
2. En considérant des oscillations d'amplitude θ_0 , quelle est la tension maximale dans le fil ?

Exercice 2

Une petite fille fait de la balançoire. Elle part, accroupie, sans vitesse initiale alors que la corde fait un angle α_1 avec la verticale.



À l'instant où la corde passe par la verticale, la petite fille se redresse, ce qui fait remonter son centre de gravité de h_1 et le replace à sa hauteur de départ (voir schéma). Elle est ensuite debout pour le reste du mouvement.

Quel est l'angle α_2 que fait la corde avec la verticale lorsque la balançoire fait demi-tour de l'autre côté ?

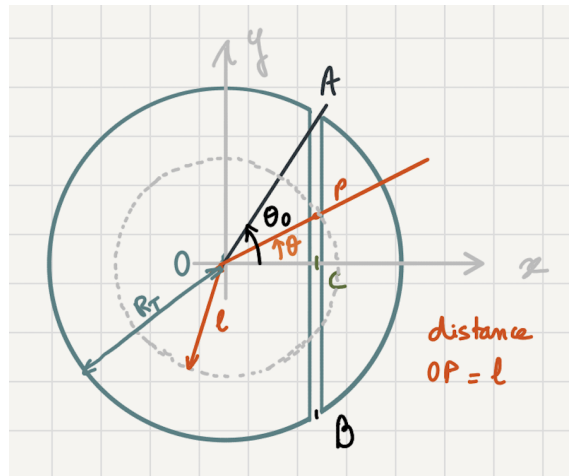
On négligera les frottements.

Exercice 3

On considère qu'on arrive à creuser un tunnel rectiligne entre deux points arbitraires sur Terre.

1. Exprimer $g(r)$ accélération de la pesanteur à la distance r du centre de la Terre en fonction de g_0 , accélération de la pesanteur à la surface de la Terre, r et R_T . On supposera ρ_T la masse volumique de la Terre uniforme.
2. On creuse un tunnel entre deux points diamétralement opposés. On lâche un objet de masse m à l'entrée du tunnel d'un côté. Déterminer l'équation du mouvement de la masse m . En déduire le type de mouvement, le temps de traversée et la vitesse de la masse lorsqu'elle est au centre de la Terre.

On creuse maintenant un tunnel entre deux points quelconques A et B . On se place dans le repère (O, \vec{x}, \vec{y}) indiqué sur la figure. On cherche l'équation différentielle du mouvement d'une masse m lâchée en A dans le tunnel.



3. Montrer que la résultante des forces sur le point P repéré par θ est

$$\sum \vec{F} = -mg(l) \sin \theta \vec{e}_y$$

4. En déduire l'équation différentielle du mouvement de la masse. On l'exprimera avec la variable y , coordonnée de P sur (Oy) .
5. Montrer que le temps pour traverser le tunnel est le même quels que soient les points de départ et d'arrivée A et B .

Exercice 4 Le petit prince

Cet exercice a été donné à l'examen de physique générale I de 2013



Dans "le petit prince" Saint-Exupéry nous présente un personnage habitant un astéroïde. Il semble se déplacer à sa surface comme sur Terre. Nous allons donc supposer que sa "planète" a une masse M_A telle que à sa surface, g a la même valeur que sur Terre. Son rayon R_A sera pris de 2 mètres (illustration) et la hauteur h du petit prince de 1 mètre.

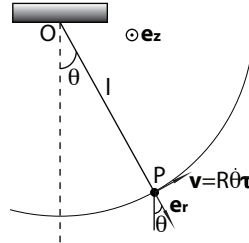
De plus ses journées semblant de durée terrestre, on peut supposer que la période de révolution de l'astéroïde est de 24 heures, comme pour la Terre.

Le rayon de la Terre, R_T est de 6400 kilomètres.

1. Calculer la densité de l'astéroïde ρ_A en fonction de la densité de la Terre ρ_T et des rayons R_A et R_T .
2. Évaluer numériquement le rapport ρ_A/ρ_T
3. Calculer $g_{\text{tête}}$ la valeur de l'accélération de la pesanteur au niveau de la tête du petit prince en fonction des données
4. Évaluer numériquement le rapport $g_{\text{tête}}/g$
5. Commenter ce résultat
6. Calculer la vitesse de libération v_l d'un objet depuis la surface de l'astéroïde, en fonction de g et des données
7. Évaluer numériquement v_l . On notera que les records mondiaux de 100m correspondent à une vitesse moyenne 10m/s.
8. Le petit prince se met à la latitude de 45° sur sa planète et construit un pendule de Foucault : pendule simple avec un fil de longueur l . La masse au bout du fil est suffisamment proche du sol pour qu'on prenne g comme accélération de la pesanteur. Il observe la rotation du plan d'oscillation du pendule à cause de la rotation de sa planète. Comparée à la rotation du plan du pendule sur Terre, sur la planète du petit prince, elle est identique, plus rapide ou plus lente? Justifiez.
9. En faisant son jogging matinal, le petit prince a voulu faire un sprint et il s'est maladroitement mis en orbite autour de sa planète. On suppose qu'il est sur une orbite circulaire à $h_o=1\text{m}$ du sol.
 - (a) Calculez son énergie mécanique, et son énergie cinétique
 - (b) Quelle vitesse son sprint a-t-il atteint?

Solutions

Corrigé exercice 1 Le problème ainsi que le système de coordonnées choisi est schématisé dans le dessin ci-dessous



1. Le théorème du moment cinétique $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}^{\text{ext}}$ nous donne, avec $OP = R = l = \text{cte.}$:

$$\begin{aligned} \sum M_0^{\text{ext}} &= \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{OP} \wedge mv\hat{e}_\theta) \\ &= \frac{d}{dt}(l m l \dot{\theta} \vec{e}_z) \end{aligned}$$

En explicitant les moments de force en jeu, on obtient alors :

$$\begin{aligned} \vec{OP} \wedge m\vec{g} + \underbrace{\vec{OP} \wedge \vec{T}}_{\vec{0} \text{ car } \parallel} &= ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \\ l\vec{e}_r \wedge m\vec{g} &= ml^2\ddot{\theta}\vec{e}_z \\ -g \sin \theta \vec{e}_z &= l\ddot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$

et donc, finalement :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}$$

Retrouver l'équation grâce à l'énergie :

Etant donné qu'aucune force non-conservative ne travaille ($\delta W^{\vec{T}} = 0$), l'énergie mécanique du système est conservée. Ainsi, $\frac{dE_{\text{mec}}}{dt} = 0$

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{cin}} + E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}m(\dot{\theta}l)^2 + mgl - mgl \cos \theta$$

$$\Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = m\dot{\theta}\ddot{\theta}l^2 + mgl\dot{\theta} \sin \theta = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0}.$$

On retrouve bien le même résultat, d'une manière plus directe.

2. La masse effectue un mouvement circulaire non uniforme. On peut alors utiliser le repère mobile de Fresnet associé au point matériel $(P, \hat{e}_\tau, \hat{e}_n)$. L'accélération vaut alors $\vec{a} = (\frac{v}{l}, \frac{dv}{dt})$.

Les forces sont \vec{T} et $m\vec{g}$ que l'on projette dans ce repère. Ainsi :

$$m \frac{v^2}{l} \hat{e}_n + m \frac{dv}{dt} \hat{e}_\tau = T \hat{e}_n - mg \cos \theta \hat{e}_n - mg \sin \theta \hat{e}_\tau$$

Projeté sur \vec{n} cela permet d'obtenir T (recherché)

$$T = m \frac{v^2}{l} + mg \cos \theta$$

On sait que la vitesse v est maximale quand le fil est vertical grâce à la conservation de l'énergie mécanique. De plus, $\cos \theta$ est aussi maximal quand le fil est vertical ($\cos 0 = 1$). Donc la tension est maximale quand le fil est vertical.

La force que doit supporter le fil est donc donnée par

$$T_{\max} = m \frac{v_v^2}{l} + mg$$

avec v_v vitesse lors du passage à la verticale.

Or, si l'angle de départ est θ_0 , l'énergie mécanique du système est $mgl(1 - \cos \theta_0)$, et donc la vitesse maximale (lorsque $\theta = 0$) est $v_v = \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}$. La force maximale que doit supporter le fil est alors donnée par :

$$T_{\max} = 2mg \left(\frac{3}{2} - \cos \theta_0 \right)$$

Corrigé exercice 2 Dans ce problème, on peut utiliser la conservation de l'énergie car les forces non-conservatives ne travaillent pas ($\vec{T} \parallel \vec{OP}$). On étudie d'abord la première phase du mouvement, lorsque la petite fille est assise. Ainsi :

$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)},$$

où nous avons remplacé h_1 par sa valeur $l(1 - \cos \alpha_1)$.

De manière générale, le moment cinétique n'est pas conservé car la force de pesanteur exerce un moment de force par rapport à l'axe de rotation. Cependant, lorsque la petite fille passe par l'axe vertical, $m\vec{g}$ est parallèle à $R\hat{e}_r$, donc $\vec{M}_O^{\vec{F}_p} = \vec{0}$. Le moment cinétique est *momentanément* conservé. Attention, ce n'est pas le cas si $\alpha \neq 0$!! Nous avons donc

$$\vec{L}_O = \vec{l} \wedge m\vec{v}.$$

Comme la vitesse est parallèle à la trajectoire, et donc perpendiculaire au fil, $L_O = mlv_1$ avant que la fille ne se soit levée, et $L'_O = ml'v_2$ après. On a de plus (trigonométriquement) $l' = l \cos \alpha_1$. Nous obtenons donc la relation

$$v_2 = \frac{lv_1}{l'} = \frac{v_1}{\cos \alpha_1}$$

La conservation de l'énergie dans la deuxième phase du mouvement (après que la fille se soit levée) nous donne :

$$mgh' = \frac{1}{2}mv_2^2 \Rightarrow h' = \frac{v_2^2}{2g} = \frac{v_1^2}{2g \cos^2 \alpha_1} = \frac{l(1 - \cos \alpha_1)}{\cos^2 \alpha_1}$$

Mais nous avons aussi géométriquement :

$$h' = l'(1 - \cos \alpha_2) = l \cos \alpha_1 (1 - \cos \alpha_2)$$

De ces deux valeurs de h' , nous tirons :

$$\cos \alpha_2 = 1 - \frac{1 - \cos \alpha_1}{\cos^3 \alpha_1}$$

Corrigé exercice 3

1. La force gravitationnelle ressentie par une masse m à une distance r du centre de la Terre est celle exercée par un corps à symétrie sphérique de la masse $M(r)$ correspondant à la masse à l'intérieur de la coquille de rayon r . La masse à l'extérieur de cette coquille n'a aucun effet. Il s'agit de la loi de Gauss qu'on peut étendre à la gravité. Ainsi :

$$\vec{F}_g(r) = -\frac{GM(r)m}{r^2} \hat{e}_r = -mg(r) \hat{e}_r,$$

où \hat{e}_r est le vecteur position partant du centre de la Terre. A la surface de la Terre, et en norme :

$$F_g = \frac{GmM_t}{R_T^2} = m \frac{G\rho_T \frac{4}{3}\pi R_T^3}{R_T^2} = mg_0,$$

donc

$$g_0 = G\rho_T \frac{4}{3}\pi R_T.$$

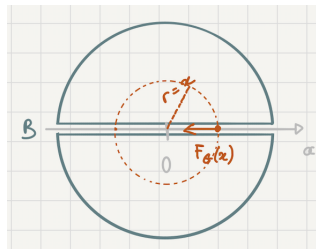
De même à une distance r du centre de la Terre,

$$g(r) = G\rho_T \frac{4}{3}\pi r.$$

D'ou on a :

$$g(r) = g_0 \frac{r}{R_T} \quad \text{et} \quad \vec{g}(r) = -g(r) \hat{e}_r.$$

2. Par simplicité, on peut choisir l'axe (Ox) parallèle à l'axe du tunnel et O est le centre de la Terre.



On a deux cas de figure. Si ($x > 0$), $r = x > 0$ et donc $F_G < 0$ (pointe vers la gauche).
 Si ($x < 0$), $r = |x| > 0$ et $F_G > 0$ (pointe vers la droite).

Dans tous les cas on a (avec x algébrique) :

$$\vec{F}_G = -m \frac{g_0}{R_T} x \vec{e}_x$$

La deuxième loi de Newton donne directement :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\hat{e}_x = -m\frac{g_0}{R_T}x\hat{e}_x.$$

Ainsi,

$$\ddot{x} + \frac{g_0}{R_T}x = 0$$

est notre equation differentielle du mouvement. Elle décrit avons un mouvement oscillatoire de type harmonique :

$$x(t) = R_T \cos(\Omega_0 t),$$

en définissant $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$ si on lache depuis le point A à $t = 0$.

Le temps de traversée est donné par une demi période :

$$\frac{T}{2} = \frac{2\pi/\Omega_0}{2}$$

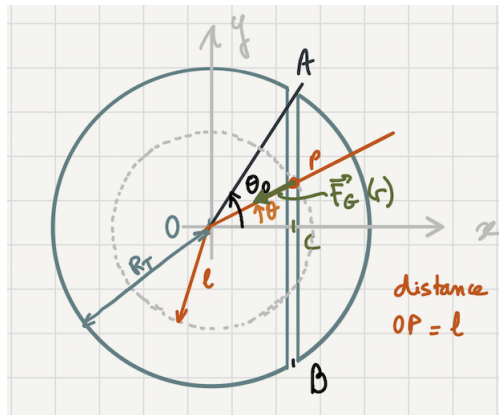
$$T/2 = \pi\sqrt{\frac{R_T}{g_0}} = \pi\sqrt{\frac{6,4 \cdot 10^6}{10}} = 2,5 \cdot 10^3 s \approx 42 \text{ minutes}$$

La vitesse au centre est :

$$\dot{x}(t) = -R_T\Omega_0 \sin(\Omega_0 t)$$

Au centre, $\dot{x}_{max} = R_T\Omega_0 = R_T\sqrt{\frac{g_0}{R_T}} = \sqrt{g_0 R_T}$. Donc $|v_{centre}| \sim \sqrt{10 \cdot 6,4 \cdot 10^6} = 8 \cdot 10^3 \text{ m/s} = 8 \text{ km/s}$

3. On a maintenant la situation suivante



Les forces en P sont la pesanteur $\vec{F}_G = -g(l)m \cos \theta \hat{e}_x - mg(l) \sin \theta \hat{e}_y$, et la réaction des parois du tunnel $\vec{N} = N \hat{e}_x$ sans quoi l'objet irait vers le centre.

Etant donné que l'accélération selon \hat{e}_x est nulle, la composante selon \hat{e}_x de la pesanteur compense exactement la force de soutien \vec{N} . Ainsi, $\sum \vec{F} = -mg \sin \theta \vec{e}_y - mg \cos \theta \hat{e}_x + N \hat{e}_x = -mg \sin \theta \vec{e}_y$ qui est bien le résultat recherché.

4. La 2e loi de Newton s'écrit :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{y}\vec{e}_y = -mg(l) \sin \theta$$

avec

$$g(l) = \frac{l}{R_T} g_0.$$

Ainsi,

$$\ddot{y} + \frac{g_0}{R_T} l \sin \theta = 0$$

Or $y = l \sin \theta$, donc

$$\ddot{y} + \frac{g_0}{R_T} y = 0$$

avec $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g_0}{R_T}}$

5. On retrouve la même équation différentielle que précédemment, avec la même pulsation propre. Donc la demi période est la même et le temps de traversée vaut toujours 42 minutes.

Corrigé exercice 4

1. La force de gravitation à la surface de l'astéroïde est égale à la pesanteur. On a donc

$$F_G = \frac{GMm}{R_A^2} = \frac{GM_A m}{R_A^2} = mg$$

Sur la surface de la Terre, cette égalité devient

$$F_G = mg = \frac{GM_T m}{R_T^2}$$

En combinant les deux équations, il vient

$$\frac{GM_T}{R_T^2} = \frac{GM_A}{R_A^2} \quad (1)$$

On sait que la masse d'une sphère se trouve par la formule $M_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$ où ρ est sa masse volumique et R son rayon.

Dès lors, en appliquant cette formule à l'équation (1), on trouve

$$\frac{\frac{4}{3}\pi R_T^3 \rho_T}{R_T^2} = \frac{\frac{4}{3}\pi R_A^3 \rho_A}{R_A^2} \Rightarrow R_T \rho_T = R_A \rho_A \Rightarrow \rho_A = \rho_T \frac{R_T}{R_A}$$

2. A.N : $\frac{\rho_A}{\rho_T} = \frac{6,4 \cdot 10^6}{2} = 3,2 \cdot 10^6$

3. On a que

$$F_{G_{tete}} = \frac{GM_A m_{tete}}{(R_A + h)^2} = m_{tete} g_{tete}$$

De la, on tire

$$g_{tete} = \frac{GM_A}{(R_A + h)^2} \quad (2)$$

Il reste à se débarrasser de G dont la valeur n'est pas donnée dans l'énoncé. Pour cela, on reprend le cas de la pesanteur à la surface de l'astéroïde qui nous donne

$$g = \frac{GM_A}{R_A^2} \Rightarrow GM_A = g R_A^2$$

En injectant cette expression dans (2), on trouve :

$$g_{tete} = g \left(\frac{R_A}{R_A + h} \right)^2$$

4. A.N : $\frac{g_{tete}}{g} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9} \approx 0,5$

5. L'accélération subie par son centre de masse est beaucoup plus importante que l'accélération subie par sa tête. Il s'agit d'un effet de marée caractérisé par un grand différentiel entre la force de pesanteur exercée sur deux parties d'un même corps.

Il s'agit d'une raison (parmi d'autres) pour laquelle nous ne pouvons pas survivre dans un trou noir. Le champ gravifique varie si vite en fonction de la distance au centre que nos pieds sont beaucoup plus attirés que notre tête. Malheureusement, cela se termine inévitablement par un démembrement en bonne et due forme.

6. La vitesse de libération est la vitesse à donner à un objet pour qu'il quitte la zone d'attraction de l'astéroïde. On va traiter ça par l'énergie.

— Initialement : $E_c = \frac{1}{2}mv_l^2$ v_l étant la vitesse de libération à lui donner initialement. $E_p = \frac{-GM_a m}{R_A}$

— Arrivé à l'infini : $v = 0$, $E_c = E_p = 0$

L'énergie étant conservée, on a

$$\frac{1}{2}mv_l^2 - \frac{GM_A m}{R_A} = 0 \Rightarrow v_l^2 = \frac{2GM_A}{R_A}$$

En se resserrant du fait que $GM_A = gR_A^2$, on trouve

$$v_l^2 = \frac{2gR_A^2}{R_A} = 2gR_A \Rightarrow \boxed{v_l = \sqrt{2gR_A}}$$

7. A.N : $v_l = \sqrt{10 \cdot 2 \cdot 2} = 2\sqrt{10} \approx 6 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

8. Le pendule voit son plan d'oscillation tourner à cause de la force de Coriolis $F_C = -ma_C = -m\vec{\Omega}_1 \vec{v}_{\mathcal{R}'}(P)$. Or, la vitesse $v_{\mathcal{R}'}(P)$ est liée à la période du pendule $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

On sait que g est le même que sur Terre, donc la période du pendule est la même que sur Terre. De plus, la période de rotation de l'astéroïde est la même que sur Terre ($T = 24 \text{ h}$) donc le terme $\vec{\Omega} \times \vec{v}$ est le même que sur Terre.

On trouve donc que la rotation du plan du pendule est identique sur Terre et sur l'astéroïde.

9. (a) Il effectue une orbite circulaire de rayon $R_A + h_0$. On a donc

$$F_G = \frac{GM_A m}{(R_A + h_0)^2} = ma_n = m \frac{v^2}{(R_A + h_0)}$$

De la, on tire la vitesse sur l'orbite donnée par

$$v^2 = \frac{GM_A}{R_A + h_0} = \frac{gR_A^2}{R_A + h_0}$$

L'énergie mécanique du petit prince est la somme de ses énergies cinétique et potentielle.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m \frac{gR_A^2}{R_A + h_0} - m \frac{gR_A^2}{R_A + h_0} = \boxed{-\frac{1}{2}m \frac{gR_A^2}{(R_A + h_0)}}$$

(b) A la surface, on a

$$E_m = \frac{1}{2}mv_s^2 - m \frac{gR_A^2}{R_A}$$

Où v_s est la vitesse du sprint. La conservation de l'énergie mécanique donne

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m \frac{gR_A^2}{R_A + h_0} &= \frac{1}{2}mv_s^2 - mgR_A \\ \Rightarrow v_s^2 &= 2gR_A - \frac{gR_A^2}{R_A + h_0} = gR_A \left(2 - \frac{R_A}{R_A + h_0} \right) \\ \Rightarrow &\boxed{v_s = \sqrt{gR_A \left(2 - \frac{R_A}{R_A + h_0} \right)}} \end{aligned}$$

$$\text{A.N : } v_s = \sqrt{10 \cdot 2 \left(2 - \frac{2}{3} \right)} = \sqrt{20 \cdot \frac{4}{3}} = 2\sqrt{6,67} \approx 5 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$