Exercices

Exercice 1 *Dépenser toute son énergie*
On considère un oscillateur harmonique en régime sinusoidal forcé par une force $F_0 \cos \omega_e t$, constitué d'un ressort de raideur k accroché à une masse m et amorti par un frottement fluide avec un coefficient de frottement $b_l = K\eta$.

1. Rappeler l'expression de la position de la masse $x(t)$ en fonction de données du problème et de la pulsation d'excitation ω_e, en régime permanent.
2. Calculer l'énergie dissipée au cours d'une période $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$.
   Remarque : On donne $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta)\, d\theta = \pi$. *Ceci est obtenu grâce à :* $\int_0^{2\pi} \sin^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = I \Rightarrow 2I = \int_0^{2\pi} (\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)) d\theta \Rightarrow 2I = 2\pi \Rightarrow I = \pi.$
3. En déduire la puissance dissipée en régime permanent.
4. Un oscillateur à ressort amorti, excité à la résonance nécessite une puissance P_r pour compenser l'amortissement. La masse amortie est désignée par m. Si l'on éteint la machine, l'amplitude diminue de moitié en l'espace d'une seconde.
   Quelle est l'amplitude lorsque la machine est en route ?
   A.N. : $f_{res} = 20$ Hz ; $P_r = 800$ W ; $m = 100$ kg.
5. (facultatif) Montrer que P_{diss} est maximal pour $\omega_e = \Omega$.

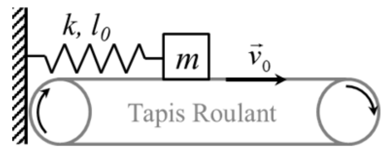
Exercice 2 *Chauve qui peut !*
Le Joker a réussi à piéger Batman ! Ce dernier se retrouve suspendu au bout d'une corde de longueur l entre deux hélices géantes tranchantes comme des lames de rasoir. Ces deux hélices tournent à des vitesses variables, de telle manière que le souffle qui en résulte exerce une force totale $\vec{F_h} = F_0 \cos(\omega_e t) \vec{e}_\varphi$ (perpendiculaire à la corde) sur Batman. On assimile Batman à un point matériel de masse m qui oscille dans un plan contenant les axes de rotation des hélices et on considère la corde comme étant rigide. On néglige de plus les frottements. Pour l'analyse, on place l'origine de notre repère au point d'attache de la corde.

1. Donnez l'équation du mouvement de Batman dans l'approximation des petites oscillations.
2. Exprimez l'amplitude des oscillations de Batman ainsi que la pulsation de résonance ω_{res}.
3. La rotation des hélices est contrôlée par le Joker, de telle sorte que ce dernier puisse ajuster la pulsation ω_e de la force s'exerçant sur Batman. Par ailleurs, les hélices sont assez éloignées pour que l'approximation des petits angles ne soit plus vraie quand

Batman s'en approche. Le Joker étant joueur, il propose au héros de choisir entre une pulsation légèrement supérieure ou inférieure à la pulsation de résonance ω_{res} (calculée au point b). Lequel de ces choix sauvera Batman ? Justifiez sans calcul.

Exercice 3 *Rester fit*

Une masse m est posée sur un tapis roulant sur lequel elle subit une force de frottement sec. On note le coefficient de frottement statique α_s et le coefficient de frottement dynamique α_d. De plus, la masse est attachée au mur par un ressort de raideur k, de longueur au repos l_0, et de masse négligeable. On note g l'accélération de la pesanteur.



1. A l'instant initial ($t = 0$), la longueur du ressort est égale à l_0 (i.e. le ressort est au repos) et le tapis roulant se met en marche. Il entraîne ainsi la masse m à une vitesse constante v_0, sous l'effet du frottement sec statique. Calculez le temps t_d au bout duquel la masse décroche du tapis, ainsi que la distance d parcourue. Exprimez-les en fonction des données du problème. La longueur du tapis est considérée comme très supérieure au déplacement de la masse.
2. Donnez l'équation du mouvement de la masse m juste après avoir décroché du tapis.
3. L'équation précédente est valable tant que la masse glisse sur le tapis. Donnez la condition pour que la masse se raccroche au tapis. Tracez qualitativement la vitesse en fonction du temps à partir de $t = 0$ en supposant $\alpha_d = 0$.

Exercice 4 *Un exercice fragmenté*

Un obus de masse m explose en plusieurs fragments. L'explosion est caractérisée par un facteur Q positif. Q est la différence entre l'énergie cinétique du système après et avant l'explosion $Q = E^f_{\text{cin}} - E^i_{\text{cin}}$.

1. Montrer que si l'obus explose en deux fragments, ils se déplacent dans des directions opposées dans le référentiel CDM du centre de masse.
2. Montrer que si l'obus explose en trois fragments, leur quantité de mouvement par rapport au centre de masse G, se trouvent dans un même plan.
3. Montrer que si l'obus se divise en deux fragments égaux, la norme de leur quantité de mouvement et leur vitesse dans le référentiel CDM sont égales respectivement à $\sqrt{\frac{mQ}{2}}$ et $\sqrt{\frac{2Q}{m}}$.
4. Montrer que si l'obus se divise en trois fragments égaux, dont les deux premiers ont la même vitesse dans le référentiel CDM et forment un angle droit, leur quantité de mouvement dans le référentiel CDM sont respectivement égales à $P_1 = P_2 = \sqrt{\frac{mQ}{6}}$ et $P_3 = \sqrt{\frac{mQ}{3}}$.

Solutions

Corrigé exercice 1

1. La solution de l'équation du mouvement d'un oscillateur forcé est donné par

$$x(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi),$$

où l'amplitude dépend de la fréquence d'excitation comme

$$A(\omega_e) = \frac{f}{\sqrt{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)^2 + 4 * \gamma^2 \omega_e^2}},$$

$$\text{avec } f = \frac{F_0}{m},\ \Omega = \sqrt{\frac{k}{m}},\ \gamma = \frac{b_l}{2m}$$

2. De l'énergie est dissipée par le travail de la force de frottements :

$$E_{\text{diss}} = -W_f = -\int_0^T \vec{F_f} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot dt = -\int_0^T \vec{F_f} \cdot \vec{v}\, dt.$$

Note : on prend ici la convention $E_{\text{diss}} > 0$ telle que $E_i = E_f + E_{\text{diss}}$ car on s'intéresse à sa valeur absolue. On aurait aussi pu étudier $Q < 0$ tel que $E_i + Q = E_f$. Les deux valeurs sont les mêmes en valeur absolue mais ne représentent pas exactement la même grandeur. E_{diff} est une quantité d'énergie perdue, alors que Q est une variation d'énergie due aux forces non conservatives. Ainsi, $E_{\text{diff}} = -Q = -W^{\text{non-cons}}$.

$$\vec{F_f} = -b_l\,\vec{v} \Rightarrow E_{\text{diss}} = -\int_0^T -b_l\vec{v} \cdot \vec{v} \cdot dt = \int_0^T b_l v^2 dt$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(A\cos(\omega_e t + \varphi)) = -A\omega_e \sin(\omega_e t + \varphi)$$

$$\Rightarrow E_{\text{diss}} = b_l A^2 \omega_e^2 \int_0^T \sin^2(\omega_e t + \varphi) dt$$

Pour intégrer, il faut faire un changement de variables. Appelons $y = \omega_e t$ alors $dt = \frac{dy}{\omega_e}$ $T = \frac{2\pi}{\omega_e}$. Intégrer de $t = 0$ à $t = T$ revient à intégrer pour y variant de 0 à 2π.

$$E_{\text{diss}} = b_l A^2 \omega_e^2 \int_0^{2\pi} \sin^2(y + \varphi)\frac{dy}{\omega_e} = b_l A^2 \omega_e \pi$$

3.

$$P_{\text{diss}} = \frac{E_{\text{diss}}}{T} = \frac{b_l A^2 \omega_e \pi}{\frac{2\pi}{\omega_e}} = \frac{b_l A^2 \omega_e^2}{2}$$

4. La puissance mécanique dissipée à la fréquence de résonance est donnée par $P_r = \frac{b_l \omega_{\text{res}}^2 A^2}{2}$. On en tire l'amplitude du système :

$$A = \frac{1}{\omega_{\text{res}}}\sqrt{\frac{2P_r}{b_l}} = \frac{1}{2\pi f_{res}}\sqrt{\frac{2P_r}{b_l}}$$

L'amortissement de l'amplitude A est décrit par un terme $A_0 e^{-\gamma t}$, où A_0 est l'amplitude initiale, γ le facteur d'amortissement et t le temps d'amortissement. En $t_1 = 1$ s, l'amplitude diminue de moitié :

$$A_0 e^{-\gamma t_1} = \frac{A_0}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{\ln 2}{t_1}$$

Or, le facteur d'amortissement est donné par $\gamma = \frac{b_l}{2m}$, et donc :

$$b_l = 2m\frac{\ln 2}{t_1}$$

L'amplitude lorsque la machine est en route est donc :

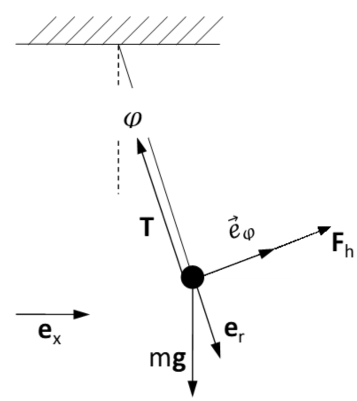
$$A = \frac{1}{2\pi f_{res}}\sqrt{\frac{P_r \cdot t_1}{m \ln 2}}$$

A.N. : $A = 27$ cm.

Corrigé exercice 2

1. Trois forces s'exercent sur Batman. La tension du fil $\vec{T}$, la pesanteur $m\vec{g}$ et la force exercée par le souffle des hélices $\vec{F_h}$. La seconde loi de Newton s'écrit donc :

$$m\vec{a} = \sum \vec{F} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F_h}$$



Et dans le repère polaire ayant comme origine le point d'attache de la corde :

$$\begin{aligned} &m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\hat{e}_\rho + m(\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi \\ =&(-T + mg\cos\varphi)\hat{e}_\rho + (-mg\sin\varphi + F_0\cos(\omega_e t))\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Nous savons de plus que $\rho = l, \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$, donc :

$$\begin{aligned} &\text{sur } \hat{e}_\rho : && -ml\dot{\varphi}^2 = -T + mg\cos\varphi \\ &\text{sur } \vec{e}_\varphi : && ml\ddot{\varphi} = -mg\sin\varphi + F_0\cos(\omega_e t) \end{aligned}$$

Dans l'approximation des petits angles $\sin\varphi \approx \varphi$. On obtient finalement l'équation du mouvement selon $\vec{e}_\varphi$ (l'équation du mouvement selon $\hat{e}_\rho$ fait intervenir la force de tension de la corde qui ne nous intéresse pas ici) :

$$ml\ddot{\varphi} = -mg\varphi + F_0\cos(\omega_e t) \Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\omega_e t)$$

soit :

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = \frac{F_0}{ml}\cos(\omega_e t) \text{ avec } \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

2. Dans le cas d'une équation différentielle du type :

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0\cos\omega_e t$$

la solution est donnée par :

$$x(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi)$$

en régime permanent.
Ici l'équation différentielle est

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2\varphi = f_0\cos(\omega_e t)$$

avec $\Omega_0^2 = \frac{g}{l}$ et $f_0 = \frac{F_0}{ml}$.
Nous avons donc $\gamma = 0$ (pas d'amortissement).
La solution est donc $\varphi(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \Phi)$ avec $A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2-\Omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}}$ (voir cours).
Avec $\gamma = 0 \;\Rightarrow\; A(\omega_e) = \frac{\frac{F_0}{ml}}{(\omega_e^2-\Omega_0^2)}$
$A(\omega_e)$ est maximum pour $\omega_e = \Omega_0$ ce qui est logique car $\omega_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - \cancel{2\gamma^2}} = \Omega_0$
Pour $\omega_e = \omega_{res}$ on a $A \to \infty$!
On voit la limite du modèle. (En particuliers l'approximation des petits angles ne marchera plus !)

3. Dans l'approximation des petits angles, la pulsation des oscillations d'un pendule est indépendante de leur amplitude. Mais ceci n'est plus vrai pour des oscillations de grandes amplitudes : la pulsation propre du pendule diminue alors quand l'amplitude des oscillations augmente.

Pour éviter de se faire hacher par les hélices, Batman doit s'éloigner de la condition de résonance au fur et à mesure que ses oscillations augmentent en amplitude. Il va donc choisir la pulsation d'excitation légèrement supérieure à $\sqrt{\frac{g}{l}}$.

Corrigé exercice 3

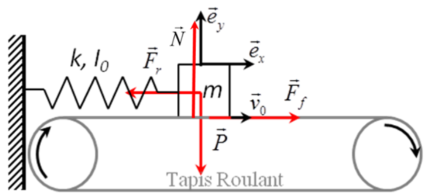
1. Vu qu'à l'instant initial la masse se trouve à la position x_0, on y place l'origine de notre repère (cf. schéma). On fait le bilan des forces :

   — la force du ressort $\vec{F_r} = -kx\hat{e}_x$

   — la force de frottement solide correspond à la force de frottement sec statique $\vec{F_f} = F_f\hat{e}_x$ tel que $||\vec{F_f}|| \leq \alpha_s||\vec{N}||$

   — la pesanteur $\vec{P} = -mg\hat{e}_y$

   — la force normale $\vec{N} = N\hat{e}_y$



   Il n'y a pas de mouvement selon $\hat{e}_y$ donc on a équilibre des forces selon cet axe : $\vec{N} = -\vec{P} = mg\,\hat{e}_y$
   La force de frottement devient donc :

$$F_f \leq \alpha_s mg.$$

   Posons donc la seconde loi de Newton selon l'axe x :

$$-kx + F_f = m\ddot{x} = 0,$$

   car la masse est entraînée par le tapis à vitesse constante.
   La force de frottement sec statique va augmenter au cours du temps jusqu'au moment du décrochage ($t = t_d$). Alors on a :

$$\vec{F_f} = \alpha_s mg\hat{e}_x$$

   Au décrochage, la seconde loi de Newton selon l'axe x s'écrit donc :

$$-kx(t_d) + \alpha_s mg = 0$$

   Ainsi la distance parcourue au moment du décrochage est :

$$d = x(t_d) = \frac{\alpha_s mg}{k}$$

   Comme le tapis entraîne la masse m à une vitesse constante v_0 on a $d = v_0 t_d = \frac{\alpha_s mg}{k}$, donc le temps de décrochage

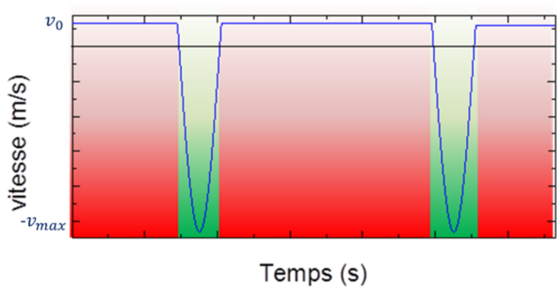
$$t_d = \frac{\alpha_s mg}{kv_0}$$

2. Après le décrochage du tapis le bilan des forces reste le même à part que la masse subit maintenant un frottement dynamique sec qui s'écrit $F_f = \alpha_d N \hat{e}_x = \alpha_d mg \hat{e}_x$. Donc l'équation de mouvement devient :

$$-kx + \alpha_d mg = m\ddot{x} \text{ ou bien } \ddot{x} + \frac{k}{m}x - \alpha_d g = 0$$

3. La masse va continuer de glisser et suivre un mouvement sinusoïdal selon l'équation trouvée précédemment, tant qu'elle aura une vitesse différente du tapis roulant. Lorsque la vitesse devient égale à v_0, alors la masse va s'accrocher de nouveau et on repasse dans les conditions de frottement sec statique.

   Le mouvement de la masse se compose de deux phases qui se répètent tour à tour :

   — Première phase (rouge) : La masse est entrainée par le tapis.

   — Deuxième phase : La masse s'est décrochée du tapis et suit un mouvement sinusoïdal jusqu'à l'instant t' pour lequel $(t') = v_0$, c'est-à-dire pour lequel la masse m est de nouveau immobile par rapport au tapis. À ce moment-là, la force de frottement statique intervient de nouveau. Et le tapis entraîne de nouveau la masse à vitesse constante v_0.

   Remarque : la norme de la vitesse maximale (négative) est supérieure à v_0. En effet, la conservation de l'énergie mécanique entre le décrochage et le raccrochage nous donne :

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \Longleftrightarrow v_{max}^2 = v_0^2 + \frac{k}{m}d^2 > v_0^2$$

Corrigé exercice 4

On suppose que le système comprenant l'obus est isolé, de sorte que sa quantité de mouvement est conservée. Initialement, elle est nulle dans le référentiel CDM ; elle le demeure après l'explosion. Les quantités de mouvement des fragments doivent donc se compenser.

1. $\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{0}$, et donc $\vec{P}_2 = -\vec{P}_1$ et les vitesses des fragments sont de sens opposé.
2. Par la conservation de la quantité de mouvement pendant l'explosion, on a :

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 = \vec{0}$$

Pour montrer que ces trois vecteurs sont coplanaires, on peut montrer qu'ils sont les trois orthogonaux au même vecteur définissant le plan $\vec{u}_\perp = \vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2$. On calcule donc le produit scalaire $\vec{P}_3 \cdot \vec{u}_\perp$. Il s'agit par définition du produit triple :

$$\vec{P}_3 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2) \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = -\vec{P}_1 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) - \vec{P}_2 \cdot (\vec{P}_1 \wedge \vec{P}_2) = 0,$$

où on a utilisé $\vec{P}_1 \parallel \vec{P}_1$ Les trois vecteurs quantité de mouvement sont donc coplanaires.

3. Les masses des deux fragments sont tous les deux égales à $\frac{m}{2}$. Le point 1. de cet exercice nous donne $\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$. Dans le référentiel CDM, l'énergie de chaque fragment vaut alors $E_{cin} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right) v_i^2$, et donc l'énergie finale totale :

$$E^f_{cin} = \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right) v_1^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{m}{2}\right) v_2^2 = \frac{1}{2} m v_1^2$$

l'énergie initiale étant nulle. Il vient alors :

$$Q = E^f_{cin} - \cancelto{0}{E^i_{cin}} = \frac{1}{2} m v_1^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2Q}{m}}$$

et par la définition de la quantité de mouvement, $P_1 = P_2 = \frac{m}{2}\sqrt{\frac{2Q}{m}} = \sqrt{\frac{mQ}{2}}$.
Note : Ici Q est positif car de l'énergie est injectée dans le système par l'explosion.

4. Les masses des trois fragments sont toutes égales à $\frac{m}{3}$. On peut donc écrire :

$$Q = E^f_{cin} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{m}(P_1^2 + P_2^2 + P_3^2)$$

Or, $P_1 = P_2 \equiv P$ et $\vec{P}_3 = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$. De plus, comme $\vec{P}_1$ et $\vec{P}_2$ sont perpendiculaires, $P_3 = 2P\cos(45°) = \sqrt{2}P$, et on obtient :

$$Q = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{m}(P^2 + P^2 + 2P^2) = 6\frac{P^2}{m} \Leftrightarrow P = \sqrt{\frac{mQ}{6}}$$

Finalement,

$$P_1 = P_2 = \sqrt{\frac{mQ}{6}} \qquad \text{et} \qquad P_3 = \sqrt{\frac{mQ}{3}}$$

Pour les vitesses, on obtient :

$$V_1 = V_2 = \sqrt{\frac{3Q}{2m}} \qquad \text{et} \qquad V_3 = \sqrt{\frac{3Q}{m}}$$