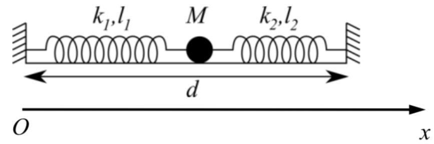
Exercices

Exercice 1 *Pris entre deux camps*

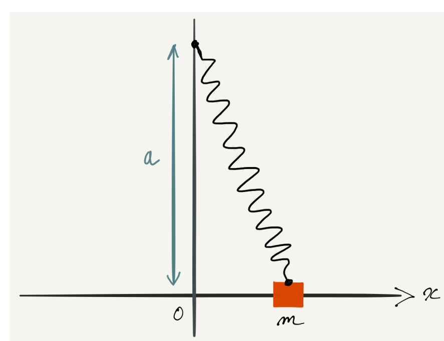
Un point matériel sans dimension de masse M est attaché de chaque côté par deux ressorts de constante de raideur k_1 et k_2 et de longueur au repos l_1 et l_2. On note d la distance entre les deux parois auxquelles sont attachés les ressorts. On néglige tout frottement dans ce problème.



1. Dans un premier temps, on ne considère que le premier ressort (k_1, l_1) ; le deuxième ressort n'est pas attaché à la masse. Déterminez l'équation du mouvement de la masse M.
2. On attache maintenant le deuxième ressort. Déterminez la position d'équilibre de la masse M.
3. Déterminez l'équation du mouvement de la masse M à l'aide du changement de variable $x' = x - x_{eq}$
4. A quelle fréquence la masse oscille-t-elle dans les deux cas ?

Exercice 2 *A la recherche de repos*

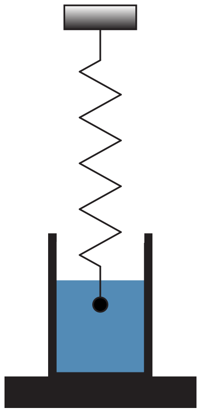
On dispose d'un ressort R_1, de raideur k_1 et de longueur l_0 au repos, ainsi que d'une masse m ponctuelle reliée au bout du ressort.
Lorsque le ressort est placé verticalement, son extrémité fixe est distante d'une longueur a de l'axe (Ox). La masse glisse sans frottements sur un rail horizontal.



1. Dans un premier temps, on suppose $a > l_0$. Déterminer l'équation différentielle du mouvement ainsi que la pulsation des oscillations. On supposera un petit déplacement tel que $x \ll a$.
2. On se place maintenant dans le cas $a = l_0$, Que devient l'équation différentielle obtenue précédemment ? A-t-elle du sens physiquement parlant ? Quelle raison peut expliquer ce résultat ?

Indication : Le développement limité de $(1 + u)^\alpha$ autour de $u = 0$ vaut $1 + \alpha u + \ldots$

Exercice 3 *S'immerger dans le problème*



Une sphère de rayon r et de masse m est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur l_0 au repos. Lorsqu'elle se déplace dans un liquide de coefficient de viscosité η, la sphère est soumise à une force de frottement donnée par la formule de Stokes :

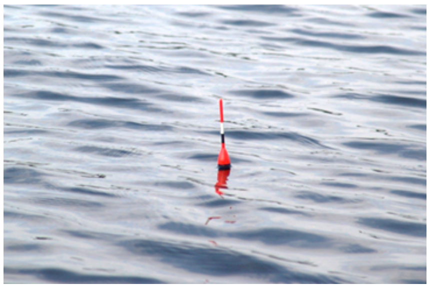
$$\vec{F}_f = -6\pi\eta r\vec{v},$$

avec $\vec{v}$ la vitesse de la sphère.

1. Etablir l'équation du mouvement de la sphère plongée dans le liquide et en déduire l'expression de la période d'oscillation T du mouvement. On fera des hypothèses judicieuses sur les conditions initiales.
2. On mesure la période des oscillations du même ressort dans l'air, où les frottements fluides sont négligeables, et on représente cette valeur par T_0. Déterminer le coefficient de viscosité du liquide en fonction de m, r, T et T_0.

Exercice 4 *Pêcher la bonne solution*

Le flotteur (ou bouchon) d'une canne à pêche flotte à la surface de l'eau. Ce dernier est de forme cylindrique de rayon r, de hauteur h et de masse homogène. Le flotteur se tient verticalement dans l'eau et il se déplace de haut en bas en restant toujours partiellement immergé. En plus de son poids, le flotteur est soumis à la poussée d'Archimède $\vec{P_A}$ et à une force de frottement visqueux $\vec{F} = -k\eta\vec{v}$. La masse volumique du flotteur vaut les deux tiers de celle de l'eau : $\rho_f = \frac{2}{3}\rho_{eau}$.

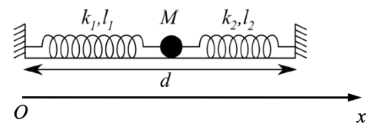


1. Calculez la hauteur h' du flotteur qui se trouve immergée à l'équilibre.
2. Déterminez l'équation différentielle du mouvement du flotteur. Exprimez la pulsation non amortie Ω_0 et le coefficient d'amortissement γ en fonction des données du problème.
3. On appuie sur le flotteur et il se met à osciller verticalement jusqu'à retrouver sa position d'équilibre. Que pouvez-vous dire sur le type d'amortissement ? Dessinez l'amplitude de l'oscillation en fonction du temps.

Solutions

Corrigé exercice 1

1. On applique la seconde loi de Newton. On prend l'origine au point d'attache du ressort gauche (voir schéma).



$$M\vec{a} = \Sigma\vec{F} \Longrightarrow M\ddot{x} = -k(x - l_1)$$

2. On place l'origine de notre repère Ox au point d'attache du ressort gauche. En utilisant cet axe pour repérer la position x de la masse m, l'allongement du ressort 1 est donné par $x - l_1$, celui du ressort 2 par $d - x - l_2$. Les deux forces de rappel ayant des sens opposés, le bilan des forces sur la masse s'écrit ainsi :

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = -k_1(x - l_1)\vec{e_x} + k_2(d - x - l_2)\vec{e_x}$$

A l'équilibre, la seconde loi de Newton devient :

$$M\vec{a} = \vec{0} = -k_1(x_{eq} - l_1)\vec{e_x} + k_2(d - x_{eq} - l_2)\vec{e_x}$$

et en projection sur $\vec{e_x}$

$$-k_1(x_{eq} - l_1) + k_2(d - x_{eq} - l_2) = 0$$

$$\Longrightarrow x_{eq} = \frac{k_1 l_1 + k_2(d - l_2)}{k_1 + k_2}$$

3. En gardant l'origine du repère au point d'attache du ressort gauche comme en b), la seconde loi de Newton est :

$$M\vec{a} = \sum \vec{F} = -k_1(x - l_1)\vec{e_x} + k_2(d - x - l_2)\vec{e_x}$$

et en projection sur $\vec{e_x}$

$$M\ddot{x} = -k_1(x - l_1) + k_2(d - x - l_2)$$

$$M\ddot{x} = -(k_1 + k_2)x + k_1 l_1 + k_2(d - l_2)$$

On peut considérablement simplifier cette expression en prenant comme origine la position d'équilibre calculée en b) ,

$$x' = x - x_{eq}$$

l'équation différentielle du mouvement devient :

$$M\ddot{x}' = -(k_1+k_2)(x'+x_{eq}) + k_1 l_1 + k_2(d-l_2)$$

$$= -(k_1+k_2)x' \underbrace{-\,(k_1+k_2)\frac{k_1 l_1 + k_2(d-l_2)}{(k_1+k_2)} + k_1 l_1 + k_2(d-l_2)}_{=0}$$

$$M\ddot{x}' = -(k_1+k_2)x'$$

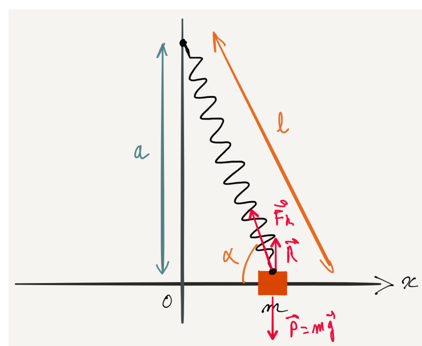
Les termes constants s'annulent lorsque l'on prend la position d'équilibre comme origine du repère ; l'équation du mouvement s'exprime plus simplement.

4. - Dans le cas (1), on peut reformuler l'équation du mouvement $M\ddot{x} = -k(x-l_1)$ en prenant la position d'équilibre comme origine. Cela donne $\ddot{x}' = -\frac{k}{M}x'$. On reconnait l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique, de pulsation $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

   La fréquence des oscillations est $f = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{M}}$

   - Dans le cas c), la pulsation est $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$ et la fréquence des oscillations $f = \frac{\Omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1+k_2}{M}}$

Corrigé exercice 2



1. La masse m est soumise à son poids $\vec{P}$, à la réaction du rail $\vec{R}$ à la force du ressort $\vec{F_k}$
   la seconde loi de Newton nous donne :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F_k}$$

   Le mouvement est uniquement sur l'axe x ($\ddot{y} = 0$). On peut donc projeter l'équation sur cet axe.
   On choisit comme origine l'intersection entre la barre et la verticale pour obtenir :

$$0 + 0 - F_k \cos\alpha = m\ddot{x}$$

   La norme de la tension du ressort vaut : $F_k = kd$ avec d l'allongement, soit $d = l - l_0$. Donc $F_k = k(l-l_0)$.

$$m\ddot{x} + F_k\cos\alpha = 0$$
$$m\ddot{x} + k(l-l_0)\cos\alpha = 0$$

On cherche à exprimer l et $\cos\alpha$ en fonction de x et a.

$$l = \sqrt{a^2 + x^2}$$
$$\cos\alpha = \frac{x}{l}$$

On obtient donc :

$$m\ddot{x} + k(l - l_0)\frac{x}{l} = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{l}\right)x = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right)x = 0$$
$$m\ddot{x} + k\left(1 - \frac{l_0}{a\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}}\right)x = 0$$

et, puisque $x \ll a$, on peut faire l'approximation

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}} = \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}$$

pour obtenir

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{a^2}\right)\right]x = 0$$

qui s'exprime aussi comme

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a} + \frac{l_0}{2a}\frac{x^2}{a^2}\right]x = 0 \tag{1}$$

Cette équation est valable dans tous les cas (pour $x \ll a$).
Si $\frac{l_0}{a}$ est différent de 1, ($\frac{l_0}{a} \neq 1$), $1 - \frac{l_0}{a}$ est non nul. Le dernier terme de cette équation devient négligeable car $2a^2 \gg x^2$ et l'équation (1) devient alors :

$$m\ddot{x} + k\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]x = 0$$
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]x = 0$$

C'est une équation différentielle de type $\ddot{x} + \Omega^2 x = 0$ avec

$$\boxed{\Omega_0^2 = \frac{k}{m}\left[1 - \frac{l_0}{a}\right]}$$

Le mouvement est sinusoïdal de pulsation Ω_0. C'est un oscillateur harmonique.

2. Dans le cas $a = l_0$, si on garde l'équation trouvée précédemment, on se rend compte que le facteur devant x tombe car $\frac{l_0}{a} = 1$ et on n'a plus d'équation différentielle de mouvement, on trouve un mouvement à vitesse constante, car il reste $m\ddot{x} = 0$ ce qui n'a pas de sens.

   L'explication de ce non sens est assez naturelle. Pour arriver au résultat, des simplifications ont été faites. Si on revient à l'équation (1), sans négliger le terme en x^2, on retrouve bien une équation différentielle

$$m\ddot{x} + k\left[\frac{l_0}{2a}\frac{x^2}{a^2}\right]x = 0$$

   c'est-à-dire

$$\boxed{\ddot{x} + \left[\frac{k}{m}\frac{1}{2a^2}\right]x^3 = 0}$$

   Il n'existe pas de résolution algébrique pour ce type d'équation.

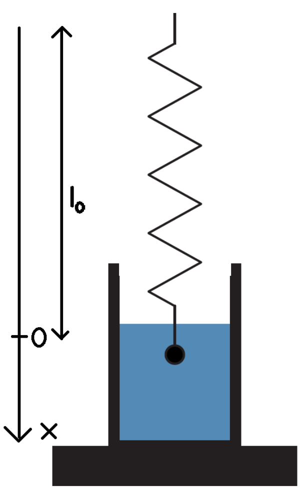
   Pour encore plus de précision, il faudrait aussi prendre un ordre supérieur lors du développement limité. Cela rendrait l'équation encore un peu plus compliquée mais toujours plus réaliste.

Corrigé exercice 3

On a le cas classique d'un oscillateur amorti avec le coefficient de frottement b_l.

$$b_l = 6\pi\eta r(\text{ donc } K = 6\pi r \text{ dans ce cas})$$

L'énoncé ne précise pas s'il faut prendre en compte la poussée d'Archimède. Nous allons la prendre en compte et constater que cela ne change que la position d'équilibre, pas le mouvement en soi.



$$\begin{aligned}\sum \vec{F} =& m\vec{a} = m\ddot{x}\vec{e}_x \\ &= \vec{F}_F + \vec{F}_A + m\vec{g} + \vec{F}_k \\ &= -6\pi\eta\dot{x} - \rho V g\vec{e}_x + mg\vec{e}_x - kx\vec{e}_x \\ \Rightarrow\ & m\ddot{x} + 6\pi\eta r\dot{x} + kx = mg - \rho V g\end{aligned}$$

avec ρ la masse volumique du fluide et V le volume de la sphère.
La position d'équilibre est donnée par $\dot{x} = \ddot{x} = 0$, soit :

$$\frac{k}{\cancel{m}}x_{eq} = \frac{mg - \rho V g}{\cancel{m}} \ \Rightarrow\ x_{eq} = \frac{mg - \rho V g}{k}$$

1. L'équation différentielle est :
$$\ddot{x} + \frac{6\pi\eta r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{mg - \rho V g}{m}$$
et a la forme :
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{mg - \rho V g}{m} = \Omega_0^2 x_{eq}$$
soit
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2(x - x_{eq}) = 0$$
avec
$$2\gamma = \frac{b_l}{m} = \frac{6\pi\eta r}{m} \text{ et } \Omega_0^2 = \frac{k}{m}$$
et
$$x_{eq} = \frac{mg - \rho V g}{k} \text{ la position d'équilibre}$$
La force d'Archimède ne change donc ni γ ni Ω_0^2.
On observe des oscillations. On suppose donc qu'on est dans le cas d'un amortissement faible $\gamma < \Omega_0$. En effet, dans le cas d'un amortissement fort ou critique le mouvement est apériodique et ne présente pas d'oscillation.
La solution est du type
$$x(t) = e^{-\gamma t}[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]$$
avec $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$. En prenant comme conditions de départ qu'on lâche la masse sans vitesse initiale avec une élongation x_0 à $t = 0$, on trouve
$$\boxed{x(t) = x_0 e^{-\gamma t}[\cos(\omega t) + \frac{\gamma}{\omega}\sin(\omega t)]}$$
La pseudopériode est obtenue par
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}$$
soit
$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{\Omega_0^2 - \left[\frac{3\pi\eta r}{m}\right]^2}}}$$

2. Dans l'air (sans amortissement), la période vaut $T_0 = \frac{2\pi}{\Omega_0}$. La définition de la pseudo-pulsation en régime amorti étant la suivante : $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$, et connaissant (grâce à la mesure) T_0, on peut directement isoler η :
$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{4\pi^2}{T_0^2} - \left[\frac{3\pi\eta r}{m}\right]^2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\eta = \frac{2m}{3r}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}}$$

Corrigé exercice 4

Rappelons tout d'abord, le volume d'un cylindre : $V_{\text{cyl}} = h\pi r^2$

1. Position d'équilibre :

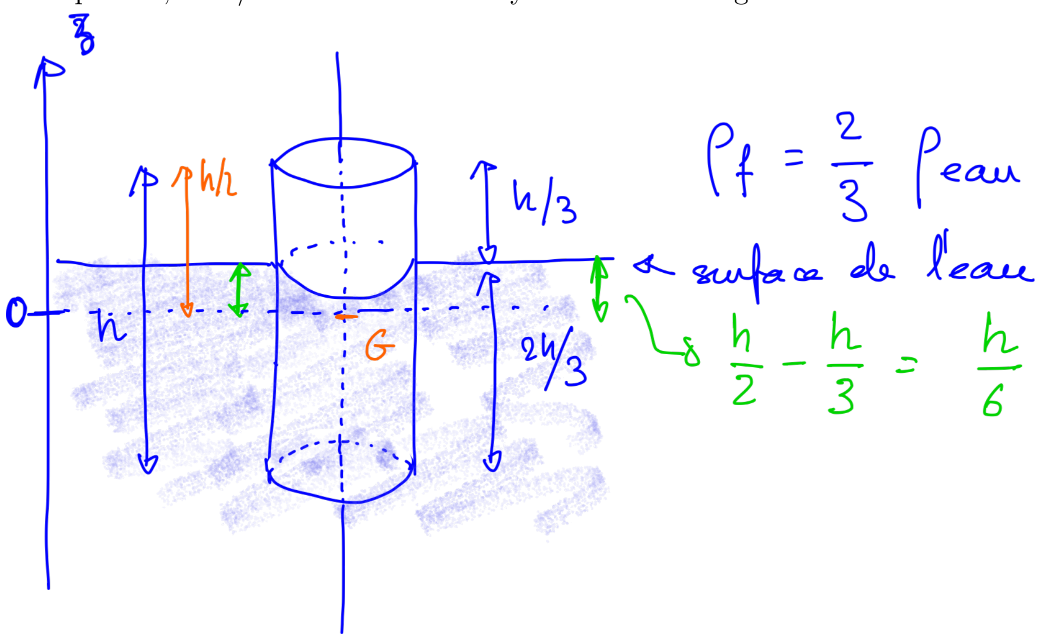
   A l'équilibre, le cylindre est soumis à la poussée d'Archimède et au Poids.
   D'après la 2° loi de Newton : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$
   A l'équilibre $\vec{a} = 0$, donc : $\vec{P_A} + \vec{P} = 0$

   On pose h', la hauteur immergée du cylindre et on projette sur l'axe z (dirigé vers le haut) :

$$\rho_{\text{eau}} V_{\text{imm}}\, g - \frac{2}{3}\rho_{\text{eau}} V_{\text{cyl}}\, g = 0 \Rightarrow \pi r^2 \rho_{\text{eau}}(h' - \frac{2}{3}h) = 0$$

$$\Rightarrow h' = \frac{2}{3}h$$

   A l'équilibre, les 2/3 de la hauteur du cylindre est immergée.



2. Equation différentielle du mouvement :

   On définit l'origine du repère par rapport au centre de gravité du flotteur lorsque celui-ci est à la position d'équilibre. L'origine se trouve donc à $-\frac{h}{6}$ par rapport à la surface de l'eau.

En notant $\vec{F_f}$ la force de frottement :

$$\vec{P_A} + \vec{P} + \vec{F_f} = m\vec{a}$$

On projette sur l'axe z :

$$\rho_{\text{eau}} V_{\text{imm}}\, g - \frac{2}{3}\rho_{\text{eau}} V_{\text{cyl}}\, g - k\eta\dot{z} = \frac{2}{3}\rho_{\text{eau}} V_{\text{cyl}}\ddot{z}$$
$$\Rightarrow \rho_{\text{eau}}\pi r^2(\frac{2}{3}h - z)g - \frac{2}{3}\rho_{\text{eau}}\pi r^2 hg - k\eta\dot{z} = \frac{2}{3}\rho_{\text{eau}}\pi r^2 h\ddot{z}$$
$$\Rightarrow \frac{2}{3}\rho_{\text{eau}}\pi r^2 h\ddot{z} + k\eta\dot{z} + \rho_{\text{eau}}\pi r^2 gz = 0 \Rightarrow \ddot{z} + \frac{3k\eta}{2\rho_{\text{eau}}\pi r^2 h}\dot{z} + \frac{3g}{2h}z = 0$$

On reconnait la forme de l'équation différentielle du mouvement pour un oscillateur amorti :

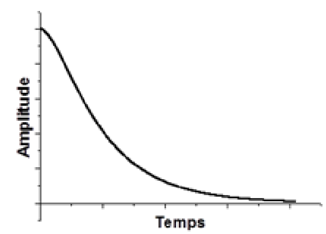
$$\ddot{z} + 2\gamma\dot{z} + \Omega_0^2 z = 0, \text{ avec } \gamma = \frac{3k\eta}{4\rho_{\text{eau}}\pi r^2 h} \text{ et } \Omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{2h}}$$

3. Voici l'allure qu'on les solutions pour les différents régimes possibles :

Si $\gamma > \mathbf{\Omega_0}$: régime d'amortissement fort, le type de mouvement est apériodique. On a :

$$z(t) = e^{-\gamma t}(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}) \text{ avec } \omega = \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

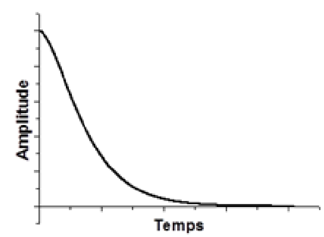
Pour ce type de mouvement on a z qui part de sa position initiale et qui atteint 0 au bout d'un temps long, sans oscillations.



Si $\gamma = \mathbf{\Omega_0}$: Il s'agit du régime d'amortissement critique. On a :

$$z(t) = e^{-\gamma t}(At + B)$$

Le cas critique est un mouvement qui ne présente pas d'oscillations et qui tend le plus rapidement vers $z = 0$.



Si $\gamma < \mathbf{\Omega_0}$: Il s'agit du régime d'amortissement faible. Le mouvement est périodique avec une amplitude décroissante.

$$z(t) = e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$$

La fonction est le produit entre une exponentielle décroissante et d'une sinusoïde. L'allure de la courbe sera donc une sinusoïde dont l'amplitude varie comme une exponentielle décroissante.

La sinusoïde à une pulsation ω, soit une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Remarque : la fonction $z(t)$ n'étant pas parfaitement périodique du fait de l'exponentielle décroissante, on appelle T pseudo-période.
Dans l'énoncé, il est précisé que le flotteur oscille avant de retrouver sa position d'équilibre : on est donc dans le régime d'amortissement faible. L'amplitude de l'oscillation du flotteur en fonction du temps est celle représentée ci-dessus.