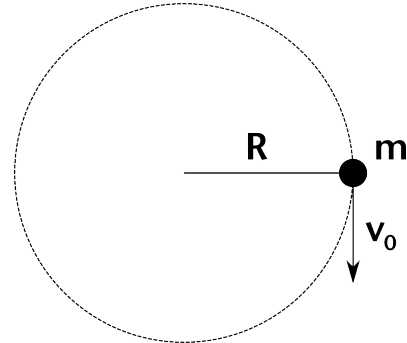


Exercices

Exercice 1 *Ne soit pas si rigide*

Une masse m est accrochée à un fil fixé à l'autre extrémité. On veut la faire tourner dans un plan vertical. On la lance vers le bas lorsque le fil est à l'horizontale avec une vitesse v_0 . On néglige la masse du fil. Quelle est la valeur minimale de v_0 pour que la masse décrive un cercle complet

- si le fil est rigide ;
- si le fil est souple.



Exercice 2 *Pédaler dans la choucroute*

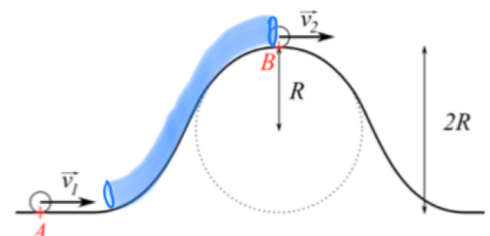
Un cycliste peut descendre sans pédaler une pente formant un angle α avec l'horizontale à une vitesse constante de 6,0 km/h. En pédalant vigoureusement pour contrer les frottements, il peut également descendre cette pente à une vitesse constante de 40 km/h.

Avec la même puissance de pédalage, à quelle vitesse pourrait-il monter cette pente? On suppose que la force de frottement est directement proportionnelle à la vitesse v , c'est-à-dire que $F_f = \eta v$, où η désigne une constante.

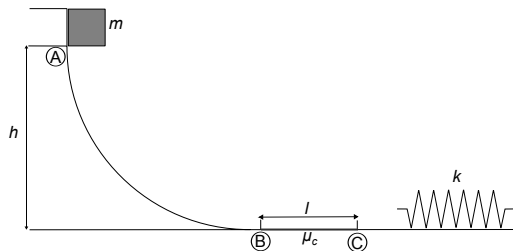
Exercice 3 *Hole in one!*

Sur un parcours de minigolf, une balle de masse m_1 doit franchir un obstacle en forme de bosse, représenté sur le schéma ci-contre : la bosse a un rayon de courbure R en son sommet, et sa hauteur est égale à $2R$. On néglige les forces de frottement. La balle est guidée dans un tube jusqu'au sommet.

- a) La balle part du point A situé avant la bosse à une vitesse \vec{v}_1 . Calculez la vitesse \vec{v}_2 de la balle lorsqu'elle atteint le sommet de la bosse (point B).
- b) Calculez la vitesse maximale \vec{v}_1 au point A , pour que la balle ne décolle pas en arrivant au sommet de la bosse.



Exercice 4 *On se lâche !*

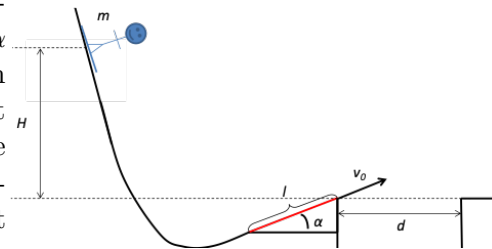


Un bloc de masse m , initialement au repos, est lâché du point **A** d'une hauteur h . La piste est considérée sans frottement, à l'exception de la portion située entre **B** et **C** qui a une longueur l . Le bloc parcourt la piste, percute un ressort ayant une constante de raideur k , et le comprime d'une distance d par rapport à sa position d'équilibre. Quelle est la valeur du coefficient de friction cinétique μ_c entre le bloc et la surface rugueuse entre les points **B** et **C** ?

Pour l'application numérique on prendra $m = 10$ kg, $h = 3$ m, $l = 6$ m, $k = 2250$ N.m⁻¹ et $d = 0,3$ m.

Exercice 5 *Bob atteint des sommets*

Bob, le snowboarder fou, veut effectuer le saut du siècle par-dessus une crevasse ! Pour cela, il imagine une rampe de longueur l faisant un angle α par rapport à l'horizontale devant la crevasse. On considère que l'altitude du point d'atterrissage est la même que celle du sommet de la rampe et que la longueur de la crevasse est d . Bob remonte ensuite la pente jusqu'à une hauteur H par rapport au sommet de la rampe (voir schéma). La masse de Bob est m .



- Dans un premier cas, Bob a recouvert la rampe de neige et on considère les forces de frottement nulles sur tout le parcours. En sachant que Bob part de la hauteur H avec une vitesse nulle, exprimez la norme de sa vitesse v_0 au moment où il quitte la rampe.
- Evidemment, le saut est réussi si sa portée est plus grande que la longueur de la crevasse d . Calculez la valeur minimale de la hauteur H que Bob doit gravir pour ne pas tomber dans la crevasse.
- Après plusieurs sauts, la neige se trouvant sur la rampe disparaît. On considère qu'il existe maintenant un frottement sec cinétique de constante μ_c tout le long de la rampe (longueur l , portion en rouge sur le schéma). Calculez la nouvelle vitesse v_f au bout de la rampe.

Solutions

Corrigé exercice 1

Si le fil est rigide : Considérons le cas limite dans lequel la masse m fait le tour complet si la vitesse en haut est tout juste nulle. Cette condition nous permet de trouver la vitesse initiale $v_{0,\min}$ minimale pour arriver au sommet. Toute vitesse plus élevée que $v_{0,\min}$ permet ainsi à la masse de continuer à avancer. De plus, comme le fil est rigide, la masse sera toujours soutenue au sommet peu importe sa vitesse, ce qui lui permet de continuer selon un mouvement circulaire uniforme.

Dans ce cas de figure où la condition est basée essentiellement sur la vitesse, il faut raisonner avec l'énergie du système. On prend le zéro de l'énergie potentielle à la hauteur du centre du cercle. Entre le fil à l'horizontale (position A) et la verticale (position B), on a :

$$\begin{aligned} E_{c_A} + E_{p_A} &= E_{c_B} + E_{p_B} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 &= 0 + mgR \end{aligned}$$

et donc $v_0 = \sqrt{2gR}$.

Si le fil est souple : Le cas limite se présente si le fil perd sa tension au sommet, auquel cas la masse n'est plus astreinte à suivre un MCU ($r \neq \text{cste}$). Intuitivement, la vitesse de la masse doit être non nulle mais on ne peut pas obtenir de condition stricte sur cette valeur. On ne peut donc pas se baser uniquement sur le bilan d'énergie. Il faut donc utiliser en plus le fait que la tension du fil au sommet est tout juste nulle.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \underbrace{\vec{T}}_{\vec{0}} + m\vec{g} &= ma_n\hat{e}_n \\ mg &= m\frac{v_B^2}{R} \end{aligned}$$

et donc $v_B = \sqrt{gR}$.

$$\begin{aligned} E_{c_A} + E_{p_A} &= E_{c_B} + E_{p_B} \\ \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 &= \frac{1}{2}mv_B^2 + mgR \end{aligned}$$

soit $v_0^2 = v_B^2 + 2gR = gR + 2gR = 3gR$.

On en tire : $v_0 = \sqrt{3gR}$

La vitesse minimale doit donc être plus élevée pour un fil souple que pour un fil rigide.

Corrigé exercice 2

On considère un axe Ox parallèle à la pente et dirigé dans le sens de la descente.

Cas 1 : le cycliste descend à $v_1 = 6 \text{ km/h}$. Etant à vitesse constante, on peut considérer que son accélération est nulle. On trouve le coefficient de frottements en passant par la 2e loi de Newton.

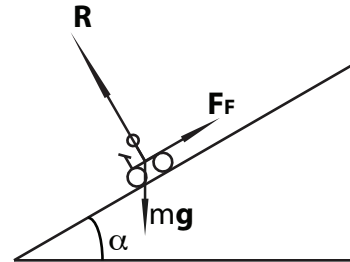
Bilan des forces :

$$m\vec{g} = \begin{pmatrix} mg \sin \alpha \\ -mg \cos \alpha \end{pmatrix}, \vec{F}_f = \begin{pmatrix} -\eta v_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ R \end{pmatrix}$$

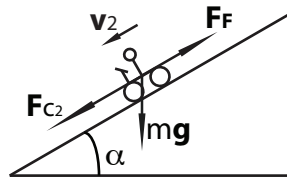
La deuxième loi de Newton donne $\sum \vec{F} = \vec{0}$

Projeté sur Ox : $mg \sin \alpha - \eta v_1 = 0$

On en tire : $\eta = \frac{mg \sin \alpha}{v_1}$



Cas 2 : le cycliste pédale et amène la puissance utile (qui fait avancer) P_c au système. Il roule à v_2 (constante). Dans un bilan d'énergie cinétique, il faut inclure le travail correspondant à cette puissance fournie $P_c \cdot dt$.



durant un petit intervalle de temps dt

$$dE_c = \delta W^{m\vec{g}} + \delta W^{\text{frottements}} + P_c dt$$

Comme la vitesse est constante, l'énergie cinétique aussi, $dE_c = 0$. Durant dt le cycliste parcourt une distance $dx > 0$ le long de Ox ($\vec{dx} = dx \hat{e}_x$). Sa variation d'altitude est $dx \sin \alpha$

$$\delta W^{m\vec{g}} = m\vec{g} \cdot \vec{dx} = mg dx \sin \alpha$$

La force de frottements est $\vec{F}_f = -\eta v_2 \hat{e}_x$, donc le travail dissipé par cette force pendant un déplacement dx vaut

$$\delta W^{\text{frottements}} = -\eta \vec{v}_2 \cdot \vec{dx} = -\eta v_2 dx,$$

car \vec{v}_2 et \vec{dx} sont de même signe. Donc

$$dE_c = P_c dt + mg \sin \alpha dx - \eta v_2 dx = 0$$

En divisant par dt

$$P_c = -mg \sin \alpha \frac{dx}{dt} + \eta v_2 \frac{dx}{dt}$$

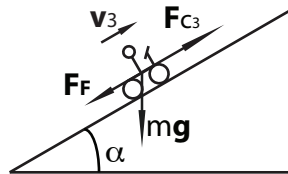
Or $\frac{dx}{dt} = v_2$

La puissance développée est donc

$$P_c = \eta v_2^2 - mg \sin \alpha v_2$$

Cas 3 : le cycliste monte à $\vec{v}_3 = v_3 \hat{e}_x$ en développant la même puissance P_c .

Attention v_3 est algébrique. Quand le cycliste monte, il est négatif car l'axe (Ox) est orienté vers le bas.



De la même manière qu'en 2, on considère v_3 constante. L'énergie cinétique du cycliste est donc conservée.

$$\begin{aligned} dE_c = 0 &= \delta W^{m\vec{g}} + \delta W^{\text{frottements}} + P_c dt \\ &= m\vec{g} \cdot \vec{dx} - \eta \vec{v}_3 \cdot \vec{dx} + P_c dt \\ &= mg \sin \alpha dx - \eta v_3 dx + P_c dt. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$P_c = -mg \sin \alpha v_3 + \eta v_3^2$$

Attention, même si l'expression est similaire qu'au cas précédent, il faut garder en tête que les variables dx et v_2 sont algébriques. Leur signe nous donne la direction du mouvement. Effectivement, quand le cycliste monte, $v_3 < 0$ ($\vec{v}_3 = v_3 \hat{e}_x$), et $dx < 0$ ($\vec{dx} = dx \hat{e}_x$). Dans l'absolu, la puissance fournie par le poids est négative et celle des frottements également. Le cycliste doit donc fournir de la puissance au système pour continuer à avancer.

En combinant les cas 2 et 3, comme P_c est le même :

$$\eta v_2^2 - mg \sin \alpha v_2 = \eta v_3^2 - mg \sin \alpha v_3$$

$$\eta(v_3^2 - v_2^2) = mg \sin \alpha(v_3 - v_2)$$

$$\eta(v_3 - v_2)(v_3 + v_2) = mg \sin \alpha(v_3 - v_2)$$

Le cas $(v_3 - v_2) = 0$ correspondrait au cas où le cycliste descend, mais on considère le cas où il monte, donc on peut simplifier par $(v_3 - v_2) \neq 0$.

$$\eta(v_3 + v_2) = mg \sin \alpha$$

Avec le cas 1 on a vu $mg \sin \alpha = \eta v_1$ Donc

$$v_3 = v_1 - v_2 < 0$$

Qui est bien négatif. La vitesse est orientée vers le haut de la pente.

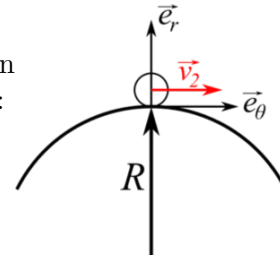
Corrigé exercice 3

- a) Comme il n'y a pas de force de frottement, le système est conservatif, et il y a conservation de l'énergie mécanique entre le point A et le point B :

$$\begin{aligned}\Delta E_m = 0 &\iff E_m(A) = E_m(B) \iff \frac{1}{2}mv_1^2 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mg2R \\ &\iff \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - mg2R \\ &\iff v_2^2 = v_1^2 - 4gR \\ &\iff v_2 = \sqrt{v_1^2 - 4gR}\end{aligned}$$

- b) La balle arrive au sommet à une vitesse v_2 . On fait un bilan des forces au point B (système de coordonnées polaires) :

- Le poids : $\vec{P} = -mg\hat{e}_r$
- La réaction du support : $\vec{N} = N\hat{e}_r$



L'accélération en coordonnées polaires est indiquée dans le formulaire (nb : on a ici un rayon constant R) :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\hat{e}_r + R\ddot{\theta}\hat{e}_\theta$$

On a par ailleurs en B : $\dot{\theta} = \frac{v_2}{R}$ (car la vitesse est tangentielle) On projette la deuxième loi de Newton sur le vecteur :

On projette la deuxième loi de Newton sur le vecteur \hat{e}_r

$$-m\frac{v_2^2}{R} = N - mg \implies N = mg - m\frac{v_2^2}{R}$$

Pour qu'il n'y ait pas de décollage, il faut que $N > 0$: $mg - m\frac{v_2^2}{R} > 0 \implies v_2^2 < gR$
En utilisant la relation trouvée dans la question 1, on a :

$$\begin{aligned}v_1^2 - 4gR &< gR \\ v_1 &< \sqrt{5gR}\end{aligned}$$

La vitesse limite est donc : $v_m = \sqrt{5gR}$

Corrigé exercice 4

Entre **A** et **B**, on a la conservation de l'énergie mécanique qui donne :

$$E_p^A + \underbrace{E_c^A}_{=0} = \underbrace{E_p^B}_{=0} + E_c^B$$

soit

$$E_c^B = mgh$$

Entre **B** et **C**, la variation d'énergie cinétique est égale au travail de la somme des forces :

$$E_c^C - E_c^B = W_{F_{tot}}^{B \rightarrow C} = \int_B^C \vec{F}_{tot} \cdot d\vec{r}$$

Or entre ces deux points, seule la force de frottement F_f travaille car $\vec{P} \perp d\vec{r}$ et $\vec{R} \perp d\vec{r}$.

$$W_{F_{tot}}^{B \rightarrow C} = \int_B^C -\mu_c R \cdot dr = \int_B^C -\mu_c mg dr$$

On a donc finalement

$$E_c^C - E_c^B = -\mu_c mgl$$

Au niveau du ressort, toute l'énergie cinétique est convertie en énergie potentielle de ressort.

$$E_c^C = E_p^k = \frac{1}{2}kd^2$$

Finalement on trouve que

$$\frac{1}{2}kd^2 - mgh = -\mu_c mgl$$

et

$$\mu_c = \frac{h}{l} - \frac{kd^2}{2mgl}$$

AN : $\mu_c = 0.33$

Corrigé exercice 5

1. Comme on néglige les forces de frottement, on peut appliquer le théorème de la conservation de l'énergie entre le haut de la pente et le bout de la rampe :

$E_M(\text{haut}) = E_p(\text{haut}) + E_c(\text{haut}) = E_M(\text{bout}) = E_p(\text{bout}) + E_c(\text{bout})$. Si on prend l'origine du potentiel en haut de la rampe, on a : $E_p(\text{haut}) = 0$ et $E_p(\text{bout}) = -mgH$. De plus, $E_c(\text{haut}) = 0$ et $E_c(\text{bout}) = \frac{1}{2}mv_0^2$. Donc on se retrouve avec $0 = -mgH + \frac{1}{2}mv_0^2$, soit :

$$v_0 = \sqrt{2gH}$$

2. On a ici un mouvement balistique avec comme accélération, avec une accélération que l'on peut projeter sur un repère à 2 dimensions (Oxy), en prenant l'origine au bout de la rampe :

$$\vec{a} = cte = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha \\ v_0 \sin \alpha \end{pmatrix}, \text{ et } \vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 = \begin{pmatrix} v_0 \cos \alpha t \\ v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2} g t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x(t) \\ r_y(t) \end{pmatrix}$$

Soit P la portée du saut de Bob. On veut $P > d$. Pour t_P tel que $r_x(t_P) = P$, on a $r_y(t_P) = 0$. Soit $v_0 \sin \alpha t_P - \frac{1}{2} g t_P^2 = 0$. Donc $t_P = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Finalement, $P = v_0 \cos \alpha \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}$. Et on cherche H telle que $P > d$, soit $\frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} > d \iff \frac{2(2gH) \sin \alpha \cos \alpha}{g} > d$

$$H > \frac{d}{2 \sin 2\alpha}$$

3. Pour calculer facilement la vitesse finale, on applique la loi de la conservation de l'énergie : La variation de l'énergie mécanique du système est égale au travail des forces de frottement. Soient E_M^H et E_M^B l'énergie du système en haut de la pente et au bout de la rampe, respectivement.

$$E_M^B - E_M^H = W_{H-B} = \int_{rampe} \vec{f}_f \cdot d\vec{l}$$

Comme la force de frottements est colinéaire au déplacement, de sens opposé, et constante tout au long de la rampe, on peut écrire $W_{H-B} = -l \|\vec{f}_f\|$.

De plus, en régime dynamique, $\|\vec{f}_f\| = \mu_c \|\vec{N}\|$, avec $\|\vec{N}\|$ la réaction normale du support, qui compense exactement la composante du poids, donc $\|\vec{N}\| = mg \cos \alpha$ (cf. schéma). Donc finalement $W_{H-B} = -\mu_c m g l \cos \alpha$.

De même que précédemment, on calcule la variation d'énergie totale entre le haut de la pente et le bout de la rampe :

$E_M^B - E_M^H = E_p^B - E_p^H + E_c^B - E_c^H$, soit $E_M^B - E_M^H = -mgH + \frac{1}{2}mv_f^2$.
Finalement, on a : $-mgH + \frac{1}{2}mv_f^2 = -\mu_c mgl \cos \alpha$, donc :

$$v_f = \sqrt{2gH - 2\mu_c gl \cos \alpha}$$