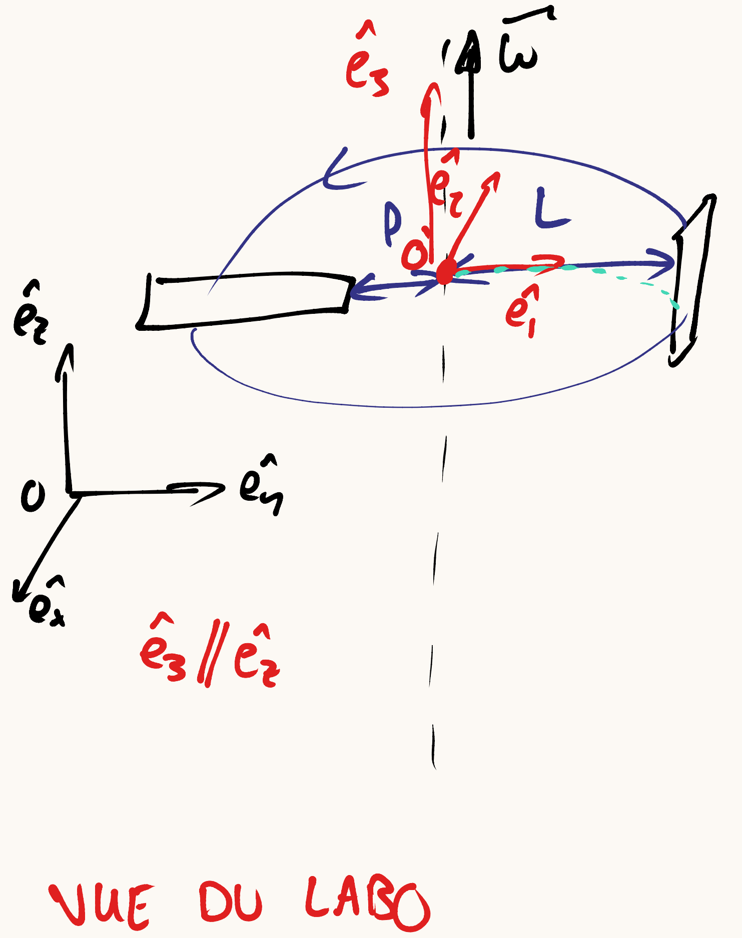
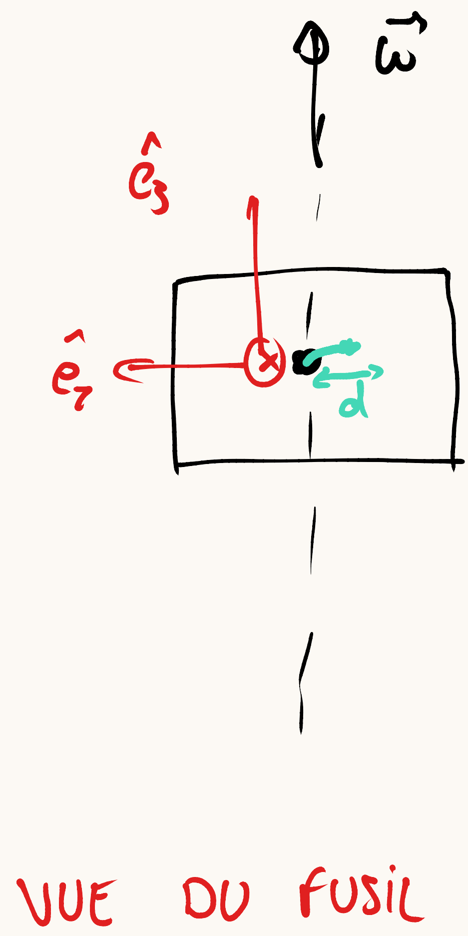
Série 3, exercice 3

Exercice 3 *Un exercice de coordination*

Un fusil et une cible sont fixés sur un support horizontal tournant autour d'un axe vertical. Si le support ne tourne pas, la balle atteint la cible au centre. Déterminer la déviation de l'impact si le support tourne à une vitesse angulaire ω, sachant que :

1. La cible est à 110 cm de l'axe ;
2. L'extrémité du canon est à 40 cm de l'axe ;
3. La vitesse de la balle est de 250 m·s^{-1} ;
4. Le support tourne en faisant 1 tour en 2 secondes.





On cherche la déviation d $\Rightarrow$ on a intérêt à travailler avec un repère cartésien.

Ref galiléen : labo $(O, \hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$

Ref non-galiléen : placé sur l'axe $(O', \hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

① On cherche $\vec{a}_{R'}(P)$.

$$\vec{a}_R(P) = \vec{a}_{R'}(P) + \underbrace{\vec{a}_R(O')}_{=\vec{0}} + \underbrace{\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{O'P}}_{=\vec{0}} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P})$$
$$+ 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{R'}(P).$$

$$\boxed{\vec{a}_{R'}(P) = \vec{a}_R(P) - \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}) - 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{R'}(P)}$$

② On exprime tout dans R'.

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{e}_3 \quad , \quad \vec{O'P} = x'\hat{e}_1 + y'\hat{e}_2 + 0 \cdot \hat{e}_3$$

$$\vec{V}_{R'}(P) = \dot{x}'\hat{e}_1 + \dot{y}'\hat{e}_2 + 0\,\hat{e}_3$$

(*) $$\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{O'P}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\omega y' \\ \omega x' \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\omega^2 x' \\ -\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*) $$2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_{R'}(P) = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x}' \\ \dot{y}' \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega \dot{y}' \\ \omega \dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}$$

(*) $$\vec{a}_{R'}(P) = \ddot{x}'\hat{e}_1 + \ddot{y}'\hat{e}_2 + \ddot{z}'\hat{e}_3$$

On obtient :

$$\begin{pmatrix} \ddot{x}' \\ \ddot{y}' \\ \ddot{z}' \end{pmatrix} = \underbrace{a_R(P)}_{\sum \vec{F}^{ext} = \vec{0}} - \begin{pmatrix} -\omega^2 x' \\ -\omega^2 y' \\ 0 \end{pmatrix} - 2\cdot\omega \begin{pmatrix} -\dot{y}' \\ \dot{x}' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{x}' = \omega^2 x' + 2\omega \dot{y}' \longrightarrow \hat{e}_1 : \text{"direction du tir"} \\ \ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \dot{x}' \longrightarrow \hat{e}_2 : \text{"direction transverse"} \end{cases}$$

On obtient un système d'EDO couplées. Elles ne sont pas facilement solvables. On aimerait les simplifier.

On s'intéresse à $y'(t)$.

$$\ddot{y}' = \omega^2 y' - 2\omega \boxed{\dot{x}'}$$

$\longrightarrow$ vitesse de propulsion / selon l'axe $\hat{e}_1$

On fait l'hypothèse d'une faible modification de la la vitesse de la balle selon $\hat{e}_1$. $\Rightarrow \dot{x}' \cong v_0$

$$\simeq \omega^2 y' - 2\omega v_0$$

$$= \omega[\underbrace{\omega y'}_{\substack{\text{"}\omega R\text{"} \\ \text{"vitesse de déviation"}}} - \underbrace{2v_0}_{\text{vitesse de la balle}}] = \omega \cdot 2v_0 \left[\cancel{\frac{\omega y'}{2 v_0}}_{\approx 0} - 1 \right]$$

$$\simeq \omega\cdot(-2v_0) = -2\omega v_0 \qquad \boxed{\ddot{y}' = -2\omega v_0}$$

$$\ddot{y}' = -2\omega v_0$$

$$\left.\begin{array}{l} y(0)=0 \\ \dot{y}(0)=0 \end{array}\right\} \text{cond. initiales}$$

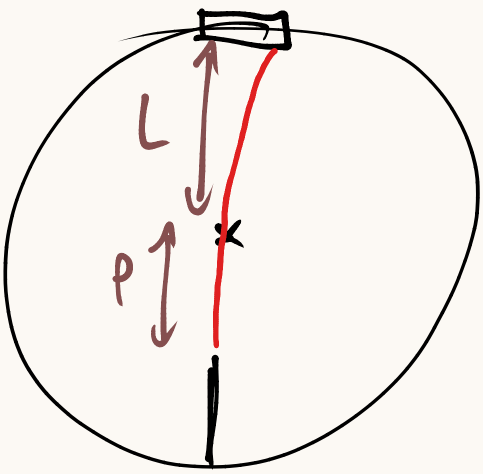
$$\dot{y}'(t) = -2\omega v_0 \cdot t$$

$$\boxed{y'(t) = -\frac{1}{2}\cdot 2\omega\, v_0 \cdot t = -\omega v_0 \cdot t^2}$$

③ Je calcule le temps de vol.

On approche la distance parcourue par

$$s \simeq P + L$$



$$\Rightarrow t_{vol} = \frac{L+P}{v_0}$$

④ Je conclus

$$d = y'(t_{vol}) = -\omega v_0 \left(\frac{L+P}{v_0}\right)^2 = -\frac{\omega (L+P)^2}{v_0}$$

$$\simeq 2.8 \text{ cm}.$$