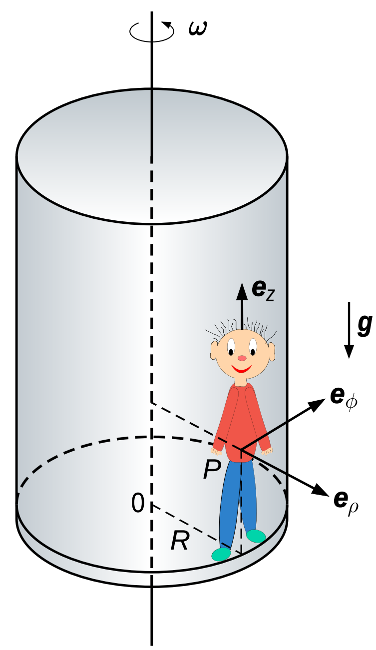
27 octobre 2025

Série 6 : Rotations

1. Manège à plancher rétractable

Un manège est constitué d'un grand cylindre creux de rayon R qui peut tourner autour de son axe de symétrie vertical. Un homme, que l'on peut modéliser par un point matériel P de masse m soumis au champ de pesanteur $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{e}_z$, prend place dans le cylindre, plaqué contre la face interne du cylindre et l'ensemble est mis en rotation. Lorsque la vitesse angulaire $\boldsymbol{\omega} = \omega\,\mathbf{e}_z$ est suffisante, elle est maintenue constante, le plancher est retiré et l'homme reste "collé à la paroi". La condition de frottement sans glissement sur la norme de la force de frottement statique est $F_f \leq \mu_s N$ où μ_s est coefficient de frottement statique entre l'homme et le manège et N est la norme de la force de réaction normale au manège.



a) Etablir le bilan des forces exercées sur une personne à l'équilibre dans le manège.

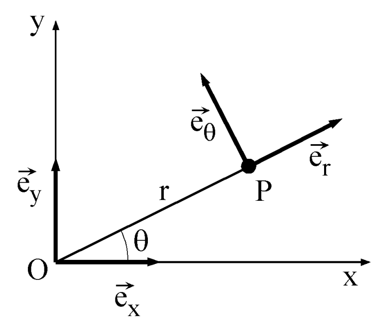
b) Déterminer la vitesse angulaire minimale $\omega_{\min}$ pour que le plancher puisse être retiré.

2. Coordonnées polaires

Soit un référentiel fixe avec des axes cartésiens de vecteurs unités $\mathbf{e}_x$ et $\mathbf{e}_y$. Soit (r, θ) les coordonnées polaires du point matériel P. Soient $\mathbf{e}_r$ et $\mathbf{e}_\theta$ les vecteurs unités associés.

a) Montrer que

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\,\mathbf{e}_x + \sin\theta\,\mathbf{e}_y$$
$$\mathbf{e}_\theta = -\sin\theta\,\mathbf{e}_x + \cos\theta\,\mathbf{e}_y$$



b) Démontrer que

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$
$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = -\dot{\theta}\,\mathbf{e}_r$$

c) Montrer que la vitesse $\mathbf{v}$ et l'accélération $\mathbf{a}$ du point matériel P sont données par

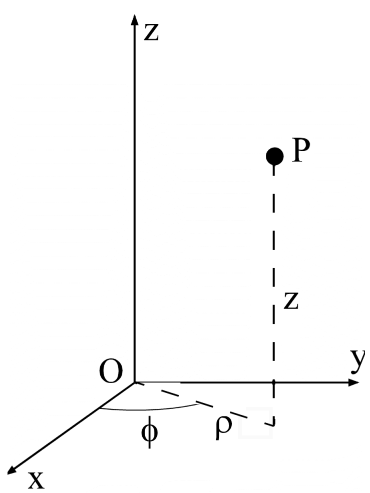
$$\mathbf{v} = \dot{r}\,\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\,\mathbf{e}_\theta$$
$$\mathbf{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\mathbf{e}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\mathbf{e}_\theta$$

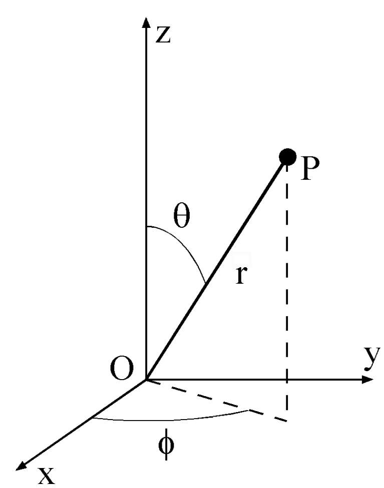
3. Vitesse et accélération en coordonnées cylindriques et sphériques

a) Etablir les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées cylindriques (ρ, ϕ, z) en utilisant les formules de Poisson pour les dérivées temporelles des vecteurs de base du repère tournant.

b) Etablir les expressions de la position, de la vitesse et de l'accélération en coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en utilisant les formules de Poisson pour les dérivées temporelles des vecteurs de base du repère tournant.

Ces systèmes de coordonnées sont illustrés sur les deux figures suivantes :





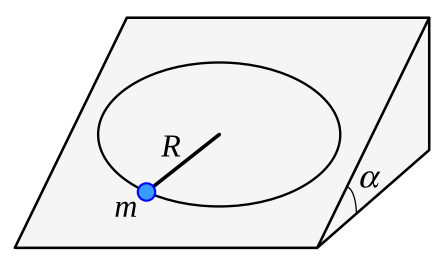
4. Point matériel dans un tube en rotation

Un point matériel de masse m est astreint à se déplacer sans friction dans un tube dont l'axe est incliné d'un angle θ fixe par rapport à l'axe verticale. Le tube est en rotation à une vitesse angulaire ω constante autour de l'axe vertical intersectant la barre.

a) Déterminer les équations du mouvement du point matériel. Les équations du mouvement doivent inclure la force de réaction du tube sur le point matériel.

5. Pendule incliné

Le pendule incliné est constitué d'un point matériel de masse m astreint à se déplacer sans frottement sur un cercle de rayon R contenu dans un plan incliné. α est l'angle d'inclinaison entre le plan incliné et le plan horizontal.

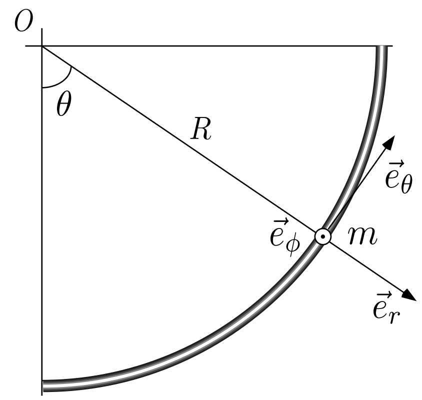


a) Faire un dessin représentant le pendule, le choix de coordonnées et les forces.

b) Déterminer les équations du mouvement du point matériel.

6. Bille dans un anneau tournant

On considère une bille de masse m qui coulisse sans frottement dans un anneau de rayon R tournant autour de l'axe vertical passant par son centre O à vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel du laboratoire. On suppose que l'on peut assimiler la bille à un point matériel.



a) Déterminer l'équation du mouvement de la bille.

Note : Utiliser le repère sphérique $(O, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\phi)$ *(c.f. schema du plan vertical ci-contre) :*

où la vitesse angulaire du repère est $\boldsymbol{\omega} = \omega\,(\cos\theta\,\mathbf{e}_r - \sin\theta\,\mathbf{e}_\theta) + \dot{\theta}\,\mathbf{e}_\phi$ avec ω une constante.

b) Déterminer les positions d'équilibre $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2}$ de la bille par rapport à l'anneau et la vitesse angulaire minimale $\omega_{\min}$ pour laquelle la position d'équilibre θ_2 existe.

c) Dans la limite des petites oscillations autour de la position d'équilibre stable θ_1, déterminer l'equation du mouvement, l'expression de la pulsation ω_0 et la vitesse angulaire maximale $\omega_{\max}$ pour laquelle la position d'équilibre θ_1 existe.

Note : Au 1^{er} *ordre en* θ*, i.e.* $\theta \ll 1$*, utiliser le développement limité des fonctions trigonométriques suivantes :*

$$\sin\theta \simeq \theta\,,$$
$$\cos\theta \simeq 1\,.$$