15 octobre 2025

Assimilation de la Théorie 6 : Rotations

1. Vitesse en coordonnées cylindriques sans la formule de Poisson

On se propose d'établir la formule en coordonnées cylindriques de la vitesse sans la formule de Poisson. Un point matériel est repéré par les trois coordonnées ρ, ϕ et z et la formule à démontrer est

$$\boxed{\boldsymbol{v_P} = \dot{\boldsymbol{OP}} = \dot{\rho}\, \boldsymbol{e_\rho} + \rho\, \dot{\phi}\, \boldsymbol{e_\phi} + \dot{z}\hat{z}}$$

Le vecteur de position est exprimé comme

$$\boldsymbol{OP} = \rho\, e_\rho + z\, \hat{z}$$

Pour simplifier le développement et sans perte de généralité on considère uniquement la composante dans le plan correspondant à la valeur z. On pose ainsi $\rho = r$ et $\phi = \theta$ avec r et θ les coordonnées polaires. De plus, on suppose que le point se déplace dans le plan $z = 0$ sans composante de vitesse en $\hat{z}$. Ainsi on a

$$\boldsymbol{OP} = r\, \boldsymbol{e_r}$$

et on doit démontrer

$$\boxed{\boldsymbol{v_P} = \dot{r}\, \boldsymbol{e_r} + r\, \dot{\theta}\, \boldsymbol{e_\theta}}$$

On demande :

1. Compléter les relations qui expriment les vecteurs unitaires $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\hat{x}$ et $\hat{y}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e_r} &= \cos\theta\, \hat{x} + \sin\theta\, \hat{y} \\ \boldsymbol{e_\theta} &= \ldots \hat{x} + \ldots \hat{y} \end{aligned}$$

2. Faire apparaître une matrice de rotation 2D.

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{e_r} \\ \boldsymbol{e_\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{pmatrix}$$

3. Inverser la matrice de rotation 2D pour faire apparaître la relation inverse exprimant $\hat{x}$ et $\hat{y}$ en fonction de $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_\theta}$.
4. Dériver la position $\boldsymbol{OP} = r\, \boldsymbol{e_r}$ une fois que $\boldsymbol{e_r}$ a été remplacé par la relation trouvée au point précédent. Utiliser la règle de Leibniz.
5. Remplacer les $\hat{x}$ et $\hat{y}$ par leur expressions en fonction de $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_\theta}$ du point 1. Simplifier les expressions obtenues. La formule cherchée devrait apparaître.

2. Vérification de la formule de la vitesse en coordonnées polaires (cylindriques)

On se propose dans cet exercice de vérification de la formule $\boldsymbol{v_P} = \dot{r}\boldsymbol{e_r} + r\dot{\theta}\boldsymbol{e_\theta} = \dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$ à partir de la formule exprimant r et θ en fonction de x et y.
Les coordonnées x et y s'expriment par rapport aux coordonnées polaires par

$$\begin{aligned} x &= r\cos(\theta) \\ y &= r\sin(\theta) \end{aligned}$$

On demande :

1. Compléter les relations inverses suivantes

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{\ldots + \ldots} \\ \theta &= \arctan\left(\frac{\ldots}{\ldots}\right) \end{aligned}$$

2. Si on prend l'arctangente classique dont le résultat est compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$, quelles sont les limitations sur la trajectoire en x et y ?
3. Considérer pour la suite de l'exercice que le point se déplace dans la région pour laquelle la fonction arctangente donne une relation correcte (non univoque). Dériver par rapport au temps les expressions obtenues.
   INDICATION :
$$\frac{d}{dx}\arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
   Utiliser comme d'habitude la règle de Leibniz.
4. Exprimer $\boldsymbol{e_r}$ et $\boldsymbol{e_\theta}$ comme pour l'exercice 1 en fontion de $\hat{x}$ et $\hat{y}$ et exprimer r et θ à l'aide des formules du point 1.
   INDICATIONS :
$$\begin{aligned} \cos(\arctan(x)) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \sin(\arctan(x)) &= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \end{aligned}$$
5. <u>Question cerise sur le gâteau :</u> Remplacer dans la formule
$$\dot{r}\,\boldsymbol{e_r} + r\,\dot{\theta}\,\boldsymbol{e_\theta}$$
   par les quantités obtenues et simplifier le tout. Tout doit disparaître pour ne laisser que le résultat
$$\dot{x}\hat{x} + \dot{y}\hat{y}$$

Un joli tour de force de simplifications !