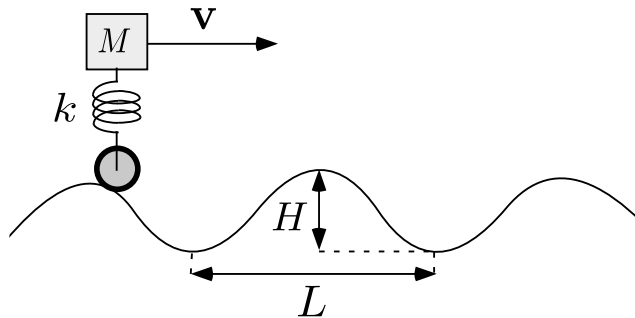


13 octobre 2025

Série 5 : Résonance, Oscillateur Harmonique II

1. Champ de bosse : le salaire de la peur

On désire modéliser le passage d'un camion chargé de nitroglycérine sur un champ de bosses. La partie supérieure du camion est assimilée à un point matériel de masse m et de vitesse horizontale constante v . La masse est reliée à un dispositif comportant un ressort de constante élastique k , de longueur au repos nulle (n.b. pour simplifier!) et de masse négligeable. Au bout du ressort, une roue de masse négligeable suit le profil du sol. Le rayon de la roue est négligeable par rapport au rayon de courbure de la route. Les "bosses" sont des sinusoïdales de hauteur H et de longueur L .



- Donner l'équation horaire $h(t)$ du point de contact entre la roue et la route (n.b. prendre l'origine des temps lorsque la roue se trouve à mi-chemin entre un creux et une bosse).
- Déduire l'équation du mouvement du point matériel de $h(t)$ (mouvement dans la direction verticale).
- Trouver l'amplitude des vibrations du point matériel en fonction de la vitesse. Donner la condition de résonance. Que peut-on dire de la vitesse du véhicule pour que le confort soit optimal?

Indications :

- La solution d'une équation du type $A\ddot{x} + Bx = C \sin(\omega t)$ est de la forme $x(t) = x_0 \sin(\omega t)$. Un changement de variable peut être nécessaire pour obtenir une équation de cette forme.
- Considérer les conditions initiales choisies de telle sorte que la solution homogène ne contribue pas à la solution complète. Seule la solution particulière correspondant au régime forcé est présente dans la solution complète. (C'est un choix de conditions initiales spécifiques.)

2. Excitation d'un oscillateur harmonique vertical

Une masse m est suspendue à une extrémité d'un ressort de longueur au repos l_0 et de constante élastique k . L'autre extrémité du ressort est accrochée à un piston dont le mouvement selon l'axe vertical est décrit par l'équation

$$s(t) = s_0 \cos(\omega t) .$$

- a) Etablir le bilan des forces extérieures et déterminer l'équation du mouvement de la masse.
- b) Montrer que l'équation du mouvement peut être mise sous la forme

$$\ddot{u}(t) + c_1 u(t) = c_1 s(t) ,$$

où $u(t) = z(t) + c_2$, et c_1 et c_2 sont des constantes à déterminer.

- c) En régime stationnaire, la solution du mouvement est de la forme

$$u(t) = u_0 \cos(\omega t) .$$

Pour atteindre ce régime, le système est passé au préalable par un régime transitoire durant lequel sa pulsation a asymptotiquement tendu vers ω . (Ceci est obtenu en variant lentement la pulsation forcée ω pour ne pas exciter le régime naturel en $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.) En régime stationnaire à ω fixé, déterminer la pulsation de résonance ω_r (i.e. divergence de l'amplitude des oscillations) en fonction de k et m .

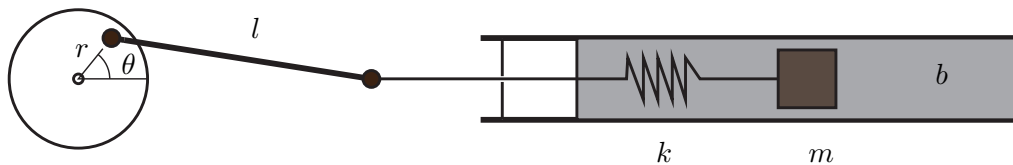


FIGURE 1 – Un piston dans un bain d’huile est relié à un moteur par un ressort couplé à une bielle.

3. Piston dans un bain d’huile relié par un ressort à une bielle

Un piston est entraîné par une bielle actionnée par une moteur (cf. figure 1). Le piston baigne dans un liquide qui est responsable d’une force de frottement visqueuse donnée par $\mathbf{F}_f = -b\mathbf{v}$ de constante b où \mathbf{v} est la vitesse du piston. La distance du joint de la bielle au centre de rotation de la roue est r . La bielle est de longueur l . Le ressort a une constante de rigidité k et une longueur à vide l_0 . La masse du piston est m . Le piston sera considéré comme un point matériel. Application numérique : $r = 0.1$ [m], $l = 1$ [m], $m = 1$ [kg], $k = 0.3$ [N/m], $b = 0.1$ [N s/m], $l_0 = 0.6$ [m].

1. A partir de quel rapport l/r est-ce que l’approximation d’un mouvement harmonique est valable pour le joint de la bielle au niveau du ressort ? (Utiliser une erreur de 10 %).
2. On enclenche le moteur qui entraîne intstantanément la roue à tourner à une vitesse angulaire constante $\dot{\theta} = \omega$ [rad/s]. De plus, il est possible de choisir cette vitesse à notre guise. Déterminer ω afin que le piston se déplace le plus loin possible dans le cylindre.
3. Quelle est la position maximale atteinte par le piston ?
4. Combien de temps faut-il attendre avant que le piston atteigne au moins 90 % de son excursion maximale après avoir enclenché la machine ?