8 octobre 2025

Série 3 : Ressorts, Oscillateur Harmonique I : indications

1. Oscillateur sur plan incliné

Montrer que l'équation différentielle est

$$m\ddot{x} = -k(x-L) + mg\sin\alpha$$

et la force de liaison est donnée par

$$T - mg\cos\alpha = 0$$

Le changement de variable pour avoir une équation homogène est

$$e = x - L - \frac{mg}{k}\sin\alpha$$

Justifier ce changement de variable.

2. Accéléromètre

Introduire la force de liaison perpendiculaire au parois de l'accéléromètre d'intensité T (pour pas que la bille reste dans le tube de l'accéléromètre) et montrer que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -T\sin\theta \\ T\cos\theta \end{pmatrix} - 2k\begin{pmatrix} \delta\cos\theta \\ \delta\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma\cos\theta \\ ma\sin\theta \end{pmatrix}$$

Résoudre ensuite pour T/m et k/m en fonction du $\delta = -10$, $a = 0$ et $\theta = 10$ pour obtenir $k/m = 0.0868$. Utiliser ensuite ce rapport k/m pour la suite du problème. Dans tout le problème, il n'est pas nécessaire derésoudre pour k et m individuellement. Pour chaque sous question T/m change mais k/m est toujours constant égal à 0.0868.

3. Palan et ressort

Montrer que

$$2\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$$

et que la position à l'équilibre est

$$\bar{x} = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{2k} + l_0 + L - H\right)$$

et que l'équation différentielle homogène est

$$\ddot{x}_h = -\frac{4k}{m}x_h$$

et la solution particulière

$$x_p = \frac{1}{2}\left(\frac{mg}{2k} + l_0 + L - H\right)$$

4. Deux points matériels reliés par un ressort

Utiliser deux bilans et lois de Newton, une pour le premier point matériel et une autre pour le second. En introduisant les coordonnées cartésiennes x_1, y_1, x_2 et y_2 démontrer que vous obtenez le système d'équations :

$$\left\{\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= -k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}\right)(x_1 - x_2) \\ m_1\ddot{y}_1 &= -k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}\right)(y_1 - y_2) - m_1 g \\ m_2\ddot{x}_2 &= -k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}\right)(x_2 - x_1) \\ m_2\ddot{y}_2 &= -k\left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}}\right)(y_2 - y_1) - m_2 g \end{aligned}\right. \tag{1}$$

Ensuite, en chosisissant les conditions initiales de manière convenable, montrer que dans l'on peut obtenir un mouvement purement vertical et les équations dégénèrent en

$$\left\{\begin{aligned} m_1\ddot{y}_1 &= -k(y_1 - y_2 - l_0\ \mathrm{sgn}(y_1 - y_2)) - m_1 g \\ m_2\ddot{y}_2 &= -k(y_2 - y_1 - l_0\ \mathrm{sgn}(y_2 - y_1)) - m_2 g \end{aligned}\right. \tag{2}$$

où sgn est la fonction de signe.
Ensuite introduire la position du centre de masse et la distance relative $z = y_1 - y_2$.