8 décembre 2025

Série 12 : Forces Centrales, Coriolis

1. Coureur sur carrousel

Un carrousel tourne à vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$. Un coureur, assimilé à un point matériel de masse m, court selon une trajectoire circulaire uniforme (pas d'accélération tangentielle) de rayon R dans le sens de rotation du carrousel à une vitesse $\mathbf{v}$ par rapport au carrousel.

a) Déterminer la direction, le sens et l'amplitude de la force $\mathbf{F}$ qui permet au coureur de se maintenir sur une trajectoire circulaire.

2 Voyage vers Mars

Préliminaire : Etablir la deuxième loi de Kepler (à partir de la constante des aires $C = r^2\dot{\theta}$), à savoir $|C| = \frac{2S}{T}$ où T désigne la période du mouvement et $S = \pi\, ab$ la surface de l'ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b. Que devient cette loi lorsque la trajectoire est circulaire de rayon R ? Etablir la troisième loi de Kepler en élevant au carré la relation obtenue et en substituant C^2 en utilisant la relation du cours $\chi = GM = C^2\frac{a}{b^2}$.

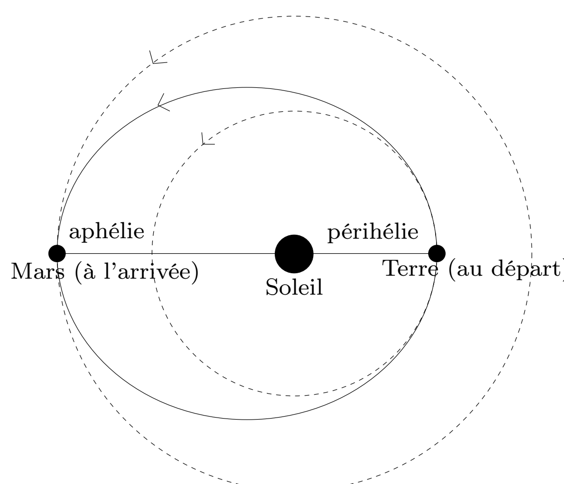
Problème : On lance un vaisseau spatial de la Terre vers Mars. On désire que le périhélie de la trajectoire de ce vaisseau corresponde à la position de la Terre au départ et son aphélie à la position de Mars à l'arrivée (voir dessin ci-contre). On considère que la Terre et Mars suivent des orbites circulaires et coplanaires avec $R_T = 1$ u.a. et $R_M = 1.52$ u.a (1u.a. = 1 unité astronomique = distance moyenne de la Terre au Soleil = 149.6×10^9 m). La période T_T de la Terre vaut une année. Par contre, on ne connaît pas la masse du vaisseau, des planètes ou du Soleil.

a) Quelle est, en années, la période T_M de l'orbite de Mars ?

b) Quelles sont les vitesses de la Terre et de Mars sur leurs orbites ?

c) Combien de temps dure le voyage de la Terre vers Mars ?

d) Quelle doit être la vitesse du vaisseau au départ pour qu'il évolue sur cette orbite ? Calculer sa vitesse relative à la Terre au départ, et de combien il faut modifier sa vitesse à l'aphélie pour qu'il arrive à se poser sur Mars ?



Indications : Résoudre ce problème en utilisant les lois de Kepler et les lois de conservation. Dans les calculs des orbites, ne tenir compte que de l'attraction gravifique du Soleil, et négliger les effets gravifiques entre les planètes et entre le vaisseau et les planètes.

3 Chute libre près de la Terre

Deux billes de masse m sont lâchées simultanément, sans vitesse initiale, depuis des hauteurs différentes au-dessus du niveau du sol $z_1(t=0) = H$ et $z_2(t=0) = H+h$ respectivement. La force gravitationnelle qui s'exerce sur la bille lâchée depuis la hauteur H est légèrement plus forte que sur celle lâchée en $H+h$.

Pendant une chute d'une durée t_{chute}, de combien la distance entre les deux billes a-t-elle augmenté à cause de cette différence de force gravitationnelle ?

Application numérique : $h = 20$ m, $t_{\text{chute}} = 8$ s, $R_T = 6371$ km, $G = 6.67 \cdot 10^{-11}$ m^{3}kg^{-1}s^{-2}, masse terrestre : $M_T = 5.9 \cdot 10^{24}$ kg.

Indications pour résoudre l'exercice :

1) Les longueurs H, h, ainsi que les hauteurs au-dessus du sol des deux billes, $z_1(t)$ et $z_2(t)$, sont toutes négligeables par rapport au rayon de la Terre R_T.
2) Négliger les frottements de l'air.
3) On peut utiliser l'approximation $\frac{1}{(1+x)^2} \simeq 1 - 2x$ valable pour $x \ll 1$.
4) Poser $u(t) = z_2(t) - z_1(t)$ pour obtenir une équation différentielle de la forme $\ddot{u} = \lambda^2 u$ qui admet une solution de type $u(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}$.