

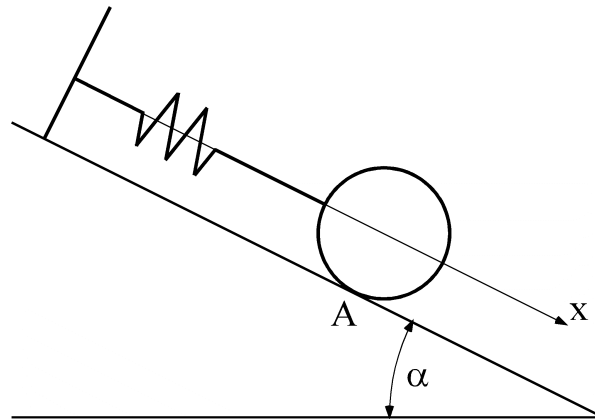
1 décembre 2025

## Série 11 : Lagrange II

### 1. Cylindre roulant oscillant

L'objectif de cet exercice est de comparer la modélisation en utilisant la méthode classique selon Newton et celle selon le formalisme de Lagrange.

Un cylindre de rayon  $R$ , de masse  $M$ , pesant, roule sans glisser sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$ . L'axe du cylindre reste horizontal. Le moment d'inertie du cylindre par rapport à cet axe est  $I$ . L'axe est retenu par un dispositif dont l'effet est équivalent à un ressort de constante élastique  $k$ , de longueur au repos  $d - R$ .



- Combien le système a-t-il de degrés de liberté ?
- En utilisant les conditions initiales  $x(0) = 0$  et  $\phi(0) = 0$ , montrez que la condition de roulement sans glissement est

$$x = -R\phi ,$$

où  $\phi$  désigne l'angle de la rotation propre du cylindre défini positif dans le sens trigonométrique.

- Etablir le bilan des forces en présence.
- Appliquer le théorème du centre de masse.
- Appliquer le théorème du moment cinétique avec  $A$  comme point de référence pour le calcul du moment cinétique et celui des moments de force. En déduire une équation du mouvement pour l'angle  $\phi$ .
- Utiliser le formalisme Lagrangien pour déterminer les équations du mouvement en rendant possible le glissement entre le cylindre et le plan incliné.
- Imposer la condition de roulement sans glissement et vérifier que les équations du mouvement sont bien celles obtenues avec la méthode classique.

## 2. Deux disques en contact munis d'une barre de liaison

On considère deux disques de même rayon  $R$  et de même masse  $m$  maintenus en contact l'un avec l'autre par une barre de liaison de masse  $M$  reliant leurs centres de rotation. Ainsi, les deux disques peuvent tourner librement autour de leur axe de rotation se trouvant chacun à l'une des extrémités de la barre de liaison. La barre est donc de longueur  $2R$ . Le centre de rotation du premier disque est fixe et celui du second disque peut se déplacer avec la barre (se trouvant toujours à son extrémité). On considère, de plus, que le contact entre les deux disques est tel qu'il y a roulement sans glissement. On demande de modéliser un tel système en utilisant la méthode de Lagrange. On impose ensuite une accélération angulaire constante au premier disque égale à  $\alpha$ . On demande alors de trouver une constante du mouvement à partir de laquelle on déterminera l'accélération angulaire minimale (pour le premier disque) afin que la barre puisse atteindre la position horizontale sachant qu'elle part de la position verticale vers le bas au moment où cette accélération angulaire est imposée. La gravité agit sur le système.

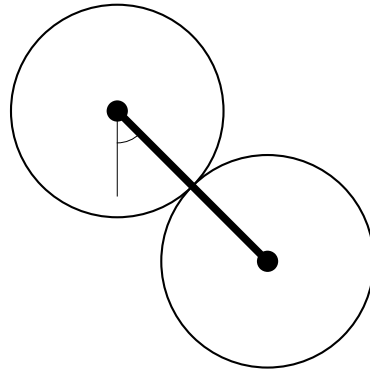


FIGURE 1 – Deux disques sont reliés par une barre. Ils peuvent tourner autour des extrémités de la barre et le centre de rotation du premier disque est fixe. Il y a roulement sans glissement des deux disques de telle sorte que l'angle de la barre (reporté sur la figure) peut varier.