

Complément

Oscillateur fonctionnant à l'aide de la force de Coulomb

Objectif

Il s'agit d'étudier un oscillateur mécanique qui fonctionne grâce à la différence entre la force de frottement statique et la force de frottement cinétique.

Deux roues tournent en contre-sens vers l'intérieur du dispositif. Une poutre est posée sur ces roues. Les centres de rotation des roues sont situés à même niveau et séparés d'une distance fixe (figure 1). On désigne par G le centre d'inertie de la barre homogène (centre de masse). On désigne par A le point de la poutre en contact avec la première roue, et par B le point de la deuxième roue en contact avec la poutre. La longueur AB est égale à $d = 0.2$ [m]. L'épaisseur de la poutre est $2h$. Le rayon de la roue est $R = 0.025$ [m]. La fréquence de rotation des roues est de 0.5 [Hz]. Le repère (O, \hat{x}, \hat{y}) est attaché au référentiel inertiel et mi-chemin entre A et B et situé à la même hauteur que G .

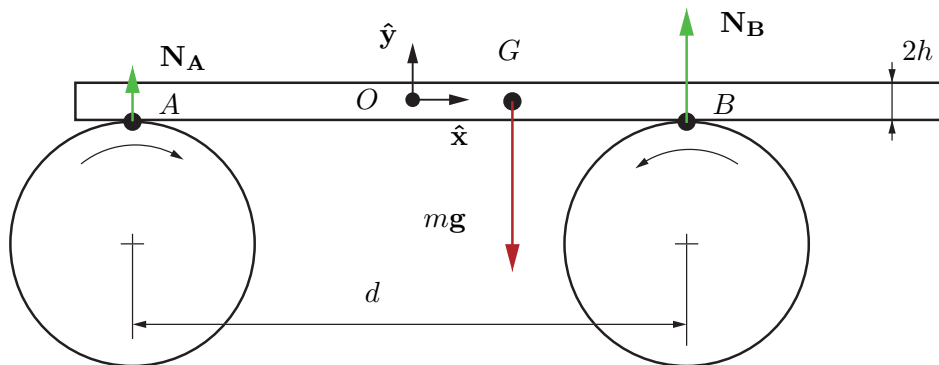


FIGURE 1 – Deux roues de rayon R tourne dans le sens contraire avec une vitesse angulaire de valeur absolue ω . Elles sont séparées d'une distance fixe d . Sur les roues, une poutre est libre de se déplacer. On constate un mouvement de va-et-vient périodique de période T .

Relations d'ordre général

On désigne par x la position variable du centre de masse par rapport au référentiel absolu (O, \hat{x}, \hat{y}) .

$$\begin{aligned}
\mathbf{OG} &= x \hat{\mathbf{x}} \\
\mathbf{OA} &= -\frac{1}{2}d \hat{\mathbf{x}} - h \hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{OB} &= \frac{1}{2}d \hat{\mathbf{x}} - h \hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{GA} &= \mathbf{OA} - \mathbf{OG} = \left(-\frac{1}{2}d - x\right) \hat{\mathbf{x}} - h \hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{AG} &= -\mathbf{GA} = \left(\frac{1}{2}d + x\right) \hat{\mathbf{x}} + h \hat{\mathbf{y}} \\
\mathbf{GB} &= \mathbf{OB} - \mathbf{OG} = \left(\frac{1}{2}d - x\right) \hat{\mathbf{x}} - h \hat{\mathbf{y}}
\end{aligned}$$

Points coïncidents On distinguera les points de contacts A et A' bien qu'ils soient au même endroit, et donc $A = A'$ en tant que lieu géométrique. La différence provient que les points n'ont pas nécessairement la même vitesse $\mathbf{v}_A \neq \mathbf{v}_{A'}$. Le point A est le point de la poutre en contact avec la première roue. Le point A' est le point de la première roue en contact avec la poutre. A cause d'un glissement, les vitesses peuvent être différentes. Une distinction similaire est effectuée entre B et B' .

Régimes de fonctionnement

On peut distinguer trois régimes différents lors du fonctionnement du dispositif.

- I. La roue roule sans glisser au point A entraînant ainsi la poutre à translater de manière uniforme. Le frottement sec statique maintient le roulement sans glissement en A . Un frottement sec cinétique apparaît en B du au glissement.
- II. La roue glisse en A et en B . Il y a présence de frottement cinétique sec en A et en B .
- III. La roue roule sans glisser au point B entraînant la poutre à translater de manière uniforme, mais dans le sens contraire au régime 1. Un frottement sec statique maintient le roulement sans glissement en B . Un frottement cinétique sec apparaît en A .

On peut ainsi représenter ces trois régimes dans un tableau :

I	II	III
$v_A = v_{A'}$	$v_A \neq v_{A'}$	$v_A \neq v_{A'}$
$v_B \neq v'_B$	$v_A \neq v_{B'}$	$v_B = v_{B'}$

Pendant toute l'expérience et à chaque instant, la barre est en équilibre de rotation et on a la loi du moment cinétique

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}_G = 0 &= \mathbf{GA} \wedge \mathbf{N}_A + \mathbf{GB} \wedge \mathbf{N}_B \\
&= \left[-\left(\frac{1}{2}d + x\right)N_A + \left(\frac{1}{2}d - x\right)N_B \right] \hat{\mathbf{z}}
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\frac{d + 2x}{d - 2x} = \frac{N_B}{N_A} \quad (1)$$

qui est valable pour $-\frac{d}{2} \leq x \leq \frac{d}{2}$. Remarque : lorsque $x \notin [-\frac{1}{2}d; \frac{1}{2}d]$ la poutre chute car elle ne s'appuie plus sur des points d'appui A' et B' .

Phase I, roulement sans glissement en A , glissement en B

Dans ce régime, la roue A impose le mouvement à vitesse constante $R\omega\hat{\mathbf{x}}$. On a

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B = \mathbf{v}_G = R\omega\hat{\mathbf{x}}$$

Comme la poutre translate à vitesse constante suite au roulement sans glissement, son accélération est nulle. En conséquence,

$$\mathbf{F}_A^{\text{fr}} + \mathbf{F}_B^{\text{fr}} + \mathbf{N}_A + \mathbf{N}_B + m\mathbf{g} = 0 \quad (2)$$

Ce bilan des forces se décompose en composantes $\hat{\mathbf{x}}$ et $\hat{\mathbf{y}}$ sous la forme

$$F_A^{\text{fr}}\hat{\mathbf{x}} - \mu_c|N_B|\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (3)$$

$$N_A\hat{\mathbf{y}} + N_B\hat{\mathbf{y}} - m\hat{\mathbf{g}} = 0 \quad (4)$$

La force de frottement est statique en A et donc limitée par

$$|F_A^{\text{fr}}| \leq \mu_s|N_A| \quad (5)$$

ce qui signifie que pour autant que la normale en A soit suffisamment grande la force de frottement en A s'adapte à celle imposée en B . La formule (3) détermine la force F^{fr} . Ainsi

$$F_A^{\text{fr}} = -\mu_c|N_B|$$

pour autant que

$$\mu_c|N_B| \leq \mu_s|N_A|$$

Lorsque $\mu_c|N_B| = \mu_s|N_A|$, on aura glissement en A , autrement dit lorsque

$$\frac{|N_B|}{|N_A|} = \frac{\mu_s}{\mu_c} \quad (6)$$

Désignons par x^* la position limite lorsque le changement de régime entre II. et III. a lieu, c-à-d. lorsque (1) et (6) sont simultanément vérifiés :

$$\frac{\mu_s}{\mu_c} = \frac{d + 2x^*}{d - 2x^*}$$

ce qui donne

$$x^* = \frac{d \mu_s - \mu_c}{2 \mu_s + \mu_c} \quad (7)$$

A cette valeur limite, les deux roues glissent et le frottement cinétique résultant induit le régime II.

Phase II, glissement en A et en B

Lorsque $x \geq x^*$ (et par symétrie lorsque $x \leq -x^*$), le régime II, où la poutre glisse en A et en B, a pour effet de freiner la poutre et de l'accélérer dans le sens opposé jusqu'à ce que la vitesse relative de la poutre avec l'une des deux roues soit à nouveau nulle induisant le passage à un mode I ou III en fonction du sens de la vitesse de la poutre.

La résultante des forces n'est plus nulle dans le régime II et on a, en composante de translation, dans le cas $x > x^*$

$$m\ddot{x} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_A^{\text{fr}} - \mathbf{F}_B^{\text{fr}} = \mu_c(|N_A| - |N_B|) \hat{\mathbf{x}} \quad (8)$$

ce qui donne en module

$$m\ddot{x} = F_A^{\text{fr}} - F_B^{\text{fr}} = \mu_c(|N_A| - |N_B|) \quad (9)$$

dans le cas $x < -x^*$ on aura la résultante opposée

$$m\ddot{x} = -F_A^{\text{fr}} + F_B^{\text{fr}} = -\mu_c(|N_A| - |N_B|) \quad (10)$$

Pour déterminer $|N_A|$ et $|N_B|$ il faut une équation supplémentaire. Elle est donnée par l'équilibre de rotation de la poutre (1) obtenue précédemment. En résolvant (1) et (4) pour $|N_A|$ et $|N_B|$, on trouve

$$\begin{aligned} |N_A| &= \frac{mg}{2} - \frac{mg}{d} x \\ |N_B| &= \frac{mg}{2} + \frac{mg}{d} x \end{aligned} \quad (11)$$

et (10) devient après simplification de la masse m

$$\ddot{x} = -2 \frac{\mu_c g}{d} x$$

qui est une équation d'un oscillateur harmonique. La solution

$$x(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{2\mu_c g}{d}} t \right) + B \sin \left(\sqrt{\frac{2\mu_c g}{d}} t \right)$$

dépend de deux constantes d'intégration qui sont déterminées par les conditions initiales du mouvement harmonique

$$\begin{aligned} x(0) &= x^* \\ \dot{x}(0) &= R\omega \end{aligned}$$

ceci donne les conditions

$$\begin{aligned}x(0) &= A = x^* \\ \dot{x}(0) &= -\sqrt{\frac{2\mu_c g}{g}} B = R\omega\end{aligned}$$

ce qui donne permet de déterminer

$$\begin{aligned}A &= x^* \\ B &= -\sqrt{\frac{d}{2\mu_c g}} R\omega\end{aligned}\tag{12}$$

Désignons par t_f l'instant où le régime II s'arrête (on suppose que le régime I a précédé le régime II). La fin du glissement aura lieu lorsque la vitesse relative entre la roue B et la poutre est nulle, autrement dit lorsque

$$\begin{aligned}\dot{x}(t_f) &= -\sqrt{\frac{2\mu_c g}{d}} x^* \sin\left(\sqrt{\frac{2\mu_c g}{d}} t_f\right) - R\omega \cos\left(\sqrt{\frac{2\mu_c g}{d}} t_f\right) \\ &= -R\omega\end{aligned}$$

à résoudre pour t_f . On détermine ainsi le changement de régime, et la poutre repart dans l'autre sens.

Ainsi, un cycle limite peut être observé en mettant ensemble les possibilités et $-I - II - III - II - I - II - III - II - \dots$ et ainsi de suite. Il faut alors préciser les conditions initiales pour que la succession $I - II$ et $III - I$ conduisent aux mêmes durées temporelles. La trajectoire se refermera alors et conduit à un mouvement cyclique appelé cycle limite. Ce phénomène peut être observé pour des vitesses angulaire ω pas trop grande.

Lorsque ω est grand, le mouvement harmonique du régime II est le seul régime observé et cela donne une solution de mouvement harmonique traité en classe.