

# VIII. Gyroscopes et Mouvements Relatifs

---

Ph. Müllhaupt

1. référentiels accélérés
2. angles d'Euler
3. équations d'Euler
4. Expression des composantes  $\omega_i$  en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\phi}$  des angles d'Euler

**référentiels accélérés**

---

## Vitesse absolue et relative

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AP}$$

L'évolution temporelle des vecteurs unités  $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$  est décrite par la vitesse angulaire  $\vec{\omega}$ .

$$\frac{d\hat{y}_i}{dt} = \vec{\omega} \wedge \hat{y}_i \quad i = 1, 2, 3$$

## Vitesse absolue et relative

$$\vec{AP} = \sum_i y_i \hat{y}_i = y_1 \hat{y}_1 + y_2 \hat{y}_2 + y_3 \hat{y}_3$$

La vitesse de  $P$ , mesurée dans le référentiel relatif, est donnée par

$$\vec{v}_r(P) = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i = \dot{y}_1 \hat{y}_1 + \dot{y}_2 \hat{y}_2 + \dot{y}_3 \hat{y}_3$$

## Vitesse absolue et relative

$$\begin{aligned}\vec{v}_a(P) &= \frac{d}{dt} \vec{OP} = \frac{d}{dt} \vec{OA} + \frac{d}{dt} \vec{AP} \\ &= \vec{v}_a(A) + \frac{d}{dt} (y_1 \hat{y}_1 + y_2 \hat{y}_2 + y_3 \hat{y}_3)\end{aligned}$$

... Leibniz ...

$$= \vec{v}_a(A) + \sum_i \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_i y_i \dot{\hat{y}}_i$$

... Poisson ...

$$\begin{aligned}&= \vec{v}_a(A) + \vec{v}_r(P) + \sum_i y_i (\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i) \\ &= \vec{v}_a(A) + \vec{v}_r(P) + \vec{\omega} \wedge \sum_i y_i \hat{y}_i \\ &= \vec{v}_a(A) + \vec{v}_r(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}\end{aligned}$$

## Accélération absolue et relative

$$\begin{aligned}\vec{a}_a(P) &= \vec{a}_a(A) + \frac{d}{dt} \left( \sum \dot{y}_i \hat{y}_i \right) + \frac{d}{dt} \left( \vec{\omega} \wedge \vec{A}P \right) \\ &= \vec{a}_a(A) + \sum (\ddot{y}_i \hat{y}_i) + \sum (\dot{y}_i \dot{\hat{y}}_i) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{A}P + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{A}P} \\ &= \vec{a}_a(A) + \vec{a}_r(P) + \sum (\dot{y}_i (\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i)) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{A}P + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{A}P} \\ &= \vec{a}_a(A) + \vec{a}_r(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{A}P \\ &\quad + \vec{\omega} \wedge \{ \vec{v}_r(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{A}P \}\end{aligned}$$

... finalement ...

$$\vec{a}_a(P) = \vec{a}_a(A) + \vec{a}_r(P) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r(P) + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{A}P + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{A}P)$$

# angles d'Euler

---

## Principes

Pour positionner un solide dans l'espace, il faut trois coordonnées de translation et trois coordonnées pour les rotations. On s'intéresse aux rotations. Le positionnement angulaire est donné par trois rotations successives dont les axes ne sont pas identiques deux fois de suite.

## Définition (... axes 3-1-3)

1. rotation d'angle  $\psi$  autour de l'axe  $x_3$
2. rotation d'angle  $\theta$  autour de l'axe  $x_1'$
3. rotation d'angle  $\phi$  autour de l'axe  $x_3''$

## Trois repères successifs centrés au même point

1.  $(G, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$ , repère dont les axes sont parallèles aux axes du repère lié au référentiel inertiel
2.  $(G, \hat{x}'_1, \hat{x}'_2, \hat{x}'_3)$ , après la rotation de  $\psi$
3.  $(G, \hat{x}''_1, \hat{x}''_2, \hat{x}''_3)$ , après les deux rotations successives  $\psi \rightarrow \theta$
4.  $(G, \hat{x}'''_1, \hat{x}'''_2, \hat{x}'''_3)$ , après les trois rotations successives  $\psi \rightarrow \theta \rightarrow \phi$

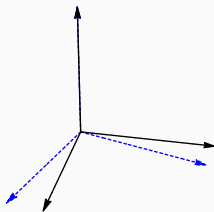
## Axes conservés entre deux rotations

1.  $\hat{x}_3 = \hat{x}'_3$
2.  $\hat{x}'_1 = \hat{x}''_1$
3.  $\hat{x}''_3 = \hat{x}'''_3$

Première rotation d'angle  $\psi$  et d'axe  $x_3$

$$\begin{aligned}\vec{GP} &= x_1\hat{x}_1 + x_2\hat{x}_2 + x_3\hat{x}_3 \\ &= x'_1\hat{x}'_1 + x'_2\hat{x}'_2 + x'_3\hat{x}'_3\end{aligned}$$

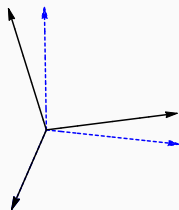
$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$



Deuxième rotation d'angle  $\theta$  et d'axe  $x_1'$

$$\begin{aligned}\vec{GP} &= x_1' \hat{x}_1' + x_2' \hat{x}_2' + x_3' \hat{x}_3' \\ &= x_1'' \hat{x}_1'' + x_2'' \hat{x}_2'' + x_3'' \hat{x}_3''\end{aligned}$$

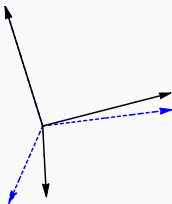
$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix}$$



Troisième rotation d'angle  $\phi$  et d'axe  $x_3''$

$$\begin{aligned}\vec{GP} &= x_1'' \hat{x}_1'' + x_2'' \hat{x}_2'' + x_3'' \hat{x}_3'' \\ &= x_1''' \hat{x}_1''' + x_2''' \hat{x}_2''' + x_3''' \hat{x}_3'''\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix}$$



# équations d'Euler

---

## Objectif

Grâce au théorème du centre de masse, nous savons établir les équations différentielles de la translation du solide. En se concentrant sur la description de la rotation par rapport au centre de masse, nous découplons la translation de la rotation. Il s'agit alors de déterminer les équations différentielles qui permettent de calculer les angles d'Euler qui repèrent l'orientation du solide dans l'espace. Six équations différentielles sont nécessaires (3 pour les angles et 3 pour les vitesses angulaires).

## Tenseur d'inertie diagonal au centre de masse

$$\vec{I}_G = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

## Equations différentielles pour les vitesses angulaires

$$I_1 \dot{\omega}_1 = (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_{G1}^{\text{ext}}$$

$$I_2 \dot{\omega}_2 = (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + M_{G2}^{\text{ext}}$$

$$I_3 \dot{\omega}_3 = (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_{G3}^{\text{ext}}$$

## Lois de la dynamique

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_G}{dt} &= \vec{M}_G^{\text{ext}} \\ \vec{L}_G &= \vec{I}_G \vec{\omega}\end{aligned}$$

## Démonstration des équations d'Euler (tenseur diagonal)

$$\begin{aligned}\vec{L}_G &= I_1 \omega_1 \hat{x}_1''' + I_2 \omega_2 \hat{x}_2''' + I_3 \omega_3 \hat{x}_3''' \\ &= I_1 \omega_1 \hat{y}_1 + I_2 \omega_2 \hat{y}_2 + I_3 \omega_3 \hat{y}_3\end{aligned}$$

## Démonstration (suite)

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_G}{dt} &= +I_1\dot{\omega}_1\hat{y}_1 + I_1\omega_1\dot{\hat{y}}_1 \\ &\quad + I_2\dot{\omega}_2\hat{y}_2 + I_2\omega_2\dot{\hat{y}}_2 \\ &\quad + I_3\dot{\omega}_3\hat{y}_3 + I_3\omega_3\dot{\hat{y}}_3\end{aligned}$$

## Démonstration (suite)

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}_G}{dt} &= +I_1\dot{\omega}_1\hat{y}_1 + I_1\omega_1(\vec{\omega} \wedge \hat{y}_1) \\ &\quad + I_2\dot{\omega}_2\hat{y}_2 + I_2\omega_2(\vec{\omega} \wedge \hat{y}_2) \\ &\quad + I_3\dot{\omega}_3\hat{y}_3 + I_3\omega_3(\vec{\omega} \wedge \hat{y}_3) \\ &= +I_1\dot{\omega}_1\hat{y}_1 + I_1\omega_1(\omega_3\hat{y}_2 - \omega_2\hat{y}_3) \\ &\quad + I_2\dot{\omega}_2\hat{y}_2 + I_2\omega_2(\omega_1\hat{y}_3 - \omega_3\hat{y}_1) \\ &\quad + I_3\dot{\omega}_3\hat{y}_3 + I_3\omega_3(\omega_2\hat{y}_1 - \omega_1\hat{y}_2)\end{aligned}$$

En absence de moment de force,  $M_G^{\text{ext}} = 0$

$$\begin{aligned} E_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \vec{I}_G \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{2} (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} E_{\text{cin}} = 0$$

## Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_{\text{cin}} &= I_1 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\omega}_3 \\ &= I_1 \omega_1 \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3 \right) \\ &\quad + I_2 \omega_2 \left( \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \omega_3 \right) \\ &\quad + I_3 \omega_3 \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2 \right) \\ &= ((I_2 - I_3) + (I_3 - I_1) + (I_1 - I_2)) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

**Dans le référentiel galién  $(G, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  centré au centre de masse**

Toutes les composantes sont constantes dans le référentiel absolu, car il n'y a pas de couple extérieur,  $\frac{d}{dt} \vec{L}_G = 0$ , autrement dit

$$\vec{L}_G(t) = \begin{pmatrix} L_{G_1}(0) \\ L_{G_2}(0) \\ L_{G_3}(0) \end{pmatrix}_{(G, \vec{\hat{x}}_1, \vec{\hat{x}}_2, \vec{\hat{x}}_3)} = \text{Constante}$$

### **Dans le référentiel embarqué ( $G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$ )**

Les composantes sont celles du moment cinétique dans le référentiel galiléen tourné pour correspondre au repère du référentiel embarqué. Bien que les composantes sont variables dans le temps, *le module du vecteur est conservé par les propriétés de la rotation !*

Démonstration de la conservation de  $\|\vec{L}_G\|$  dans le référentiel  $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

$$\begin{aligned} \vec{L}_G \Big|_{(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)} &= \sum_{i=1}^3 I_i \omega_i \hat{y}_i = I_G \vec{\omega} \\ \|\vec{L}_G\|^2 &= (I_G \vec{\omega}) \bullet (I_G \vec{\omega}) \\ &= I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 \end{aligned}$$

## Démonstration (suite)...

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \|\vec{L}_G\|^2 &= I_1^2 \omega_1 \dot{\omega}_1 + I_2^2 \omega_2 \dot{\omega}_2 + I_3^2 \omega_3 \dot{\omega}_3 \\ &= I_1^2 \omega_1 \left( \frac{I_2 - I_3}{I_1} \omega_2 \omega_3 \right) \\ &\quad + I_2^2 \omega_2 \left( \frac{I_3 - I_1}{I_2} \omega_1 \omega_3 \right) \\ &\quad + I_3^2 \omega_3 \left( \frac{I_1 - I_2}{I_3} \omega_1 \omega_2 \right) \\ &= [I_1(I_2 - I_3) + I_2(I_3 - I_1) + I_3(I_1 - I_2)] \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ &= (I_1 I_2 - I_1 I_3 + I_2 I_3 - I_1 I_2 + I_1 I_3 - I_2 I_3) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \\ &= 0\end{aligned}$$

# Résumé des conservations en absence ce moment extérieur

$$bsM_G^{\text{ext}} = 0$$

**Energie est conservée**

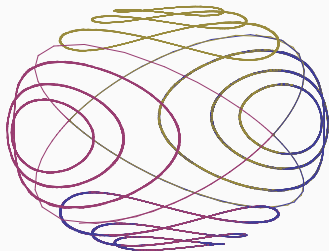
$$E = \frac{1}{2} \vec{\omega} \bullet \vec{I}_G \vec{\omega} = \text{cst.}$$

$$I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 = \text{cst.}$$

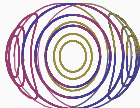
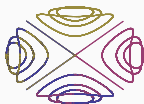
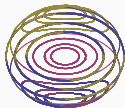
**Le module du moment cinétique est conservé**

$$\|\vec{L}_G\|^2 = I_1^2 \omega_1^2 + I_2^2 \omega_2^2 + I_3^2 \omega_3^2 = \text{cst.}$$

$\Rightarrow \vec{\omega} \in$  intersection de deux ellipsoïdes !!



Le vecteur  $\omega$  demeure sur l'intersection de deux ellipsoïdes expliquant l'instabilité autour de l'axe intermédiaire



**Expression des composantes  $\omega_i$   
en fonction de  $\dot{\theta}$ ,  $\dot{\psi}$  et  $\dot{\phi}$  des  
angles d'Euler**

---

En fonction des  $\omega_i$  on a

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{y}_1 + \omega_2 \hat{y}_2 + \omega_3 \hat{y}_3$$

On constate que le repère  $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  n'est autre que  $(G, \hat{x}_1''', \hat{x}_2''', \hat{x}_3''')$  des angles d'Euler.

# Vitesse angulaire en fonction des vitesses angulaires des angles d'Euler

## Vitesse angulaire instantanée de rotation...

... due à la rotation du solide repéré par les angles d'Euler ...

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\psi}\hat{x}_3 + \dot{\theta}\hat{x}'_1 + \dot{\phi}\hat{x}''_3 \\ &= \dot{\psi}\hat{x}'_3 + \dot{\theta}\hat{x}''_1 + \dot{\phi}\hat{x}'''_3\end{aligned}$$

## Vitesse angulaire instantanée de rotation...

... exprimée dans le repère lié au solide  $(G, x_1''', x_2''', x_3''')$  ...

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \omega_i \hat{x}_i'''\end{aligned}$$