

VI. Rotations

moments de force et moment cinétique;
cinématique de la rotation: rotation plane, rotation 3D,
rotation infinitésimale, formule de Poisson, coordonnées
cylindriques et sphériques

Ph. Müllhaupt

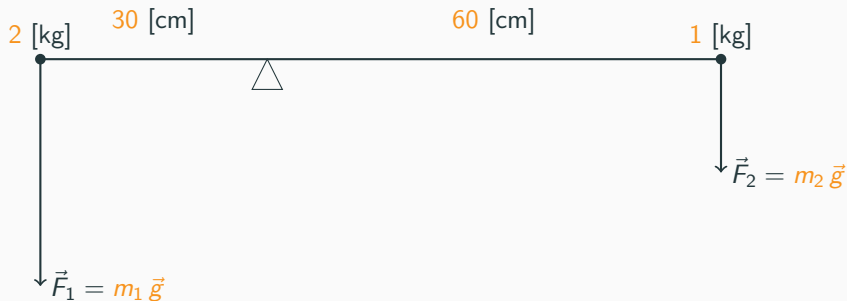
Programme — VI. Rotations

1. moment de force et moment cinétique
invariance et rotation
2. les rotations planes
le point tourne, le repère demeure fixe
le repère tourne, le point demeure fixe
3. la formule de Poisson
par la méthode de la matrice de rotation
la formule de Poisson
4. coordonnées
cylindriques
sphériques

moment de force et moment cinétique

moment de force – équilibre de leviers

constat empirique: équilibre lors d'équivalence de leviers



$$\begin{aligned} M_1 = F_1 d_1 &= F_2 d_2 = M_2 \\ 20 \times 0.3 &= 10 \times 0.6 \end{aligned} \quad [\text{N m}]$$

On va généraliser la force à un nouveau concept de telle sorte qu'au niveau du travail on ait une équation du type

$$M d\theta = \delta W = \vec{F} \bullet \vec{dr}$$

avec $d\theta$ un angle infiniment petit.

La quantité M reste à définir.

Etudions une rotation plane d'un angle infinitésimal $d\theta$. Comme il s'agit d'une rotation, il y a une contrainte (liaison) circulaire

$$x^2 + y^2 = r^2 = \|\vec{OP}\|^2$$

la position du point P s'exprime par le rayon vecteur \vec{r}

$$\vec{OP} = \vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

et la force est exprimée par ses composantes

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$$

dérivons la contrainte par rapport au temps, et faisons apparaître les différentielles dx , dy , (des petits Δx et Δy)

$$\begin{aligned}2x\dot{x} + 2y\dot{y} &= 0 \\2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} &= 0 \\x dx + y dy &= 0\end{aligned}$$

tous les déplacements sont paramétrés par l'angle

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -r \sin \theta \dot{\theta} \\ \dot{y} &= r \cos \theta \dot{\theta} \\ dx &= -r \sin \theta d\theta \\ dy &= r \cos \theta d\theta\end{aligned}$$

mais

$$\begin{aligned}r \cos \theta &= x \\ r \sin \theta &= y\end{aligned}$$

donc...

$$dx = -y d\theta$$

$$dy = x d\theta$$

et le travail infinitésimal s'écrit

$$\begin{aligned}\delta W &= \vec{F} \bullet \vec{dr} = F_x dx + F_y dy \\ &= F_x(-y d\theta) + F_y(x d\theta) \\ &= M d\theta\end{aligned}$$

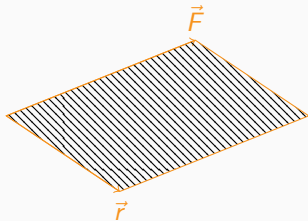
$$M \triangleq x F_y - y F_x$$

On retrouve le bras de levier "force \times distance" mais quelque peu "généralisé" en x et en y !

moment de force – produit vectoriel

Essayons de transformer la formule de M en une formule plus "vectorielle":

si on exprime en composantes et que l'on représente le parallélogramme



on constate que l'on bien une surface donnée par

$$\begin{vmatrix} x & y \\ F_x & F_y \end{vmatrix} = xF_y - yF_x$$

ainsi on est amené à poser

$$\vec{M} = M \hat{z} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x) \hat{z}$$

comme \vec{M} dépend du point d'origine, on note

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

définition

Le moment de force d'un système de forces agissants sur des points P_α bien particuliers, moment de force par rapport à un point A donné, est:

$$\vec{M}_A = \sum_{\alpha} A\vec{P}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha$$

$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} AP_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$

théorèmes issus des lois de Newton

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{M}_O$$

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \vec{M}_G$$

remarque

Certaines propriétés dynamiques d'un ensemble de points matériels (ensemble rigide ou non) demeurent invariantes par rotation. En absence de moment extérieur, le moment cinétique évalué en un point fixe O ou au centre de masse G est invariant.

rotation d'un angle fixe

Soit deux référentiels galiléens qui sont obtenus par rotation de l'un par rapport à l'autre d'un angle fini (non dépendant du temps). Les lois physiques sont les mêmes dans ces deux référentiels.

les rotations planes

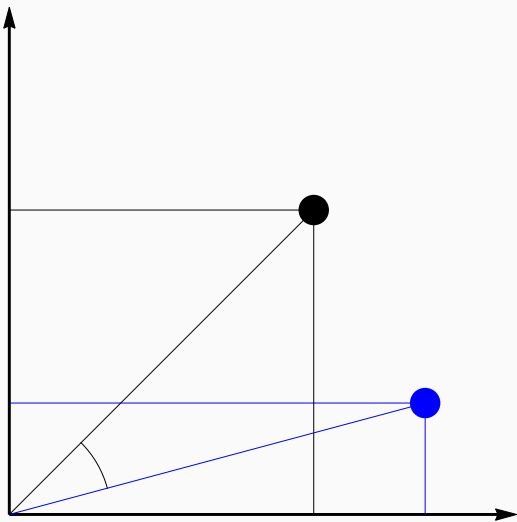
le point tourne, le repère demeure fixe

$$\vec{OP} = \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2$$

$$\vec{OP}' = \alpha' \hat{x}_1 + \beta' \hat{x}_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Le point tourne, le repère reste fixe

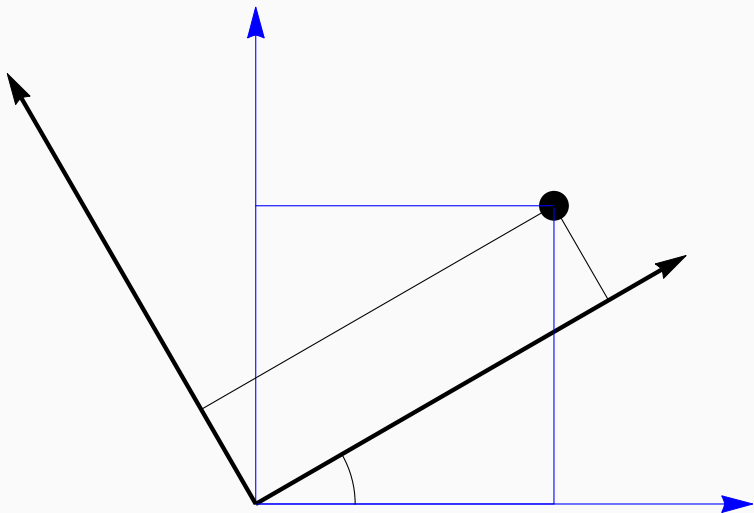


le repère tourne, le point demeure fixe

$$\vec{OP} = \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2$$

$$\vec{OP} = \alpha' \hat{x}'_1 + \beta' \hat{x}'_2$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$



la formule de Poisson

... par la matrice de rotation ...

définie par un axe engendré par le vecteur \hat{n} normé ($\|\hat{n}\| = 1$) et d'angle θ

rotation d'axe \hat{n} et d'angle θ

description

Une rotation d'axe engendré par \hat{n} et d'angle θ opère sur un point P et amène celui-ci en Q . Le vecteur \hat{n} est de norme unité

$$\|\hat{n}\| = 1$$

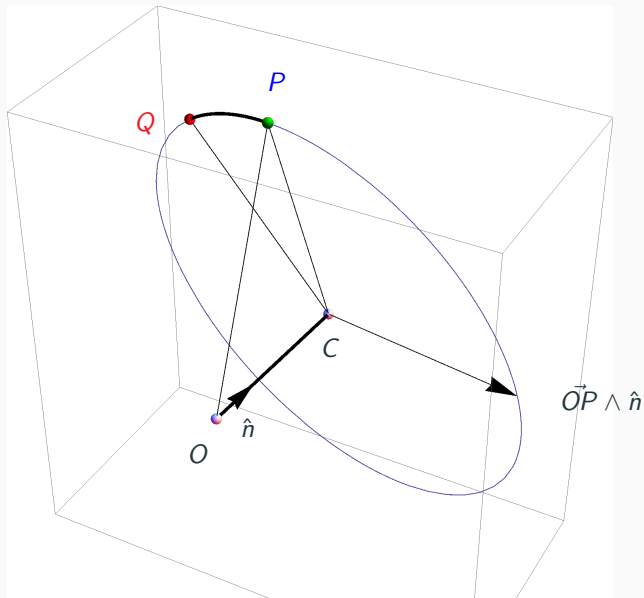
problème

Déterminer la matrice correspondant à cette rotation

définition d'un point auxiliaire C

Le point C est l'intersection entre l'axe de rotation et le plan orthogonal à l'axe de rotation et qui contient les deux points P et Q

rotation d'axe \hat{n} et d'angle θ



première étape

On va commencer par exprimer des relations vectorielles entre différents points spécifiques, en particulier le point P et les vecteurs \vec{CP} et \vec{CQ}

on remarque graphiquement que

$$\begin{aligned}\vec{OC} &= (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} \\ \vec{CQ} &= \cos\theta\vec{CP} + \sin\theta\hat{n} \wedge \vec{CP}\end{aligned}$$

... ainsi ...

$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$

$$\vec{CP} = \vec{OP} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n}$$

$$\begin{aligned}\vec{CQ} &= \cos \theta \{ \vec{OP} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} \} + \sin \theta \hat{n} \wedge \{ \vec{OP} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} \} \\ &= \cos \theta \{ \vec{OP} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} \} + \sin \theta \hat{n} \wedge \vec{OP}\end{aligned}$$

$$\text{car } \sin \theta \hat{n} \wedge (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} = \sin \theta (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} \wedge \hat{n} = \vec{0}$$

... d'autre part ...

$$\begin{aligned}\vec{CQ} &= \vec{OQ} - \vec{OC} \\ &= \vec{OQ} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n}\end{aligned}$$

et ainsi

$$\begin{aligned}\vec{OQ} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} &= \cos \theta \{ \vec{OP} - (\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} \} + \sin \theta (\hat{n} \wedge \vec{OP}) \\ \vec{OQ} &= \cos \theta \vec{OP} + (1 - \cos \theta)(\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} + \sin \theta (\hat{n} \wedge \vec{OP})\end{aligned}$$

... transformation en opérations matricielles ...

$(\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n}$ s'écrit

$$\begin{aligned}(\vec{OP}^T \hat{n})\hat{n} &= (\hat{n}^T \vec{OP})\hat{n} && \text{car } \hat{n}^T \vec{OP} \text{ est un scalaire} \\ &= \hat{n}(\hat{n}^T \vec{OP}) && \text{idem} \\ &= (\hat{n}\hat{n}^T)\vec{OP} && \text{associativité du prod. matriciel}\end{aligned}$$

mais...

$$\hat{n}\hat{n}^T = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix}$$

... transformation en opérations matricielles ...

$$\begin{aligned}\hat{n} \wedge \vec{OP} &= \begin{vmatrix} \hat{x}_1 & n_1 & OP_1 \\ \hat{x}_2 & n_2 & OP_2 \\ \hat{x}_3 & n_3 & OP_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} n_2 OP_3 - n_3 OP_2 \\ n_3 OP_1 - n_1 OP_3 \\ n_1 OP_2 - n_2 OP_1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OP_1 \\ OP_2 \\ OP_3 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

... de plus ...

$$\cos \theta \vec{OP} = (\cos \theta I) \vec{OP}$$

L'équation vectorielle

$$\vec{OQ} = \cos \theta \vec{OP} + (1 - \cos \theta)(\vec{OP} \bullet \hat{n})\hat{n} + \sin \theta(\hat{n} \wedge \vec{OP})$$

... devient une équation matricielle ...

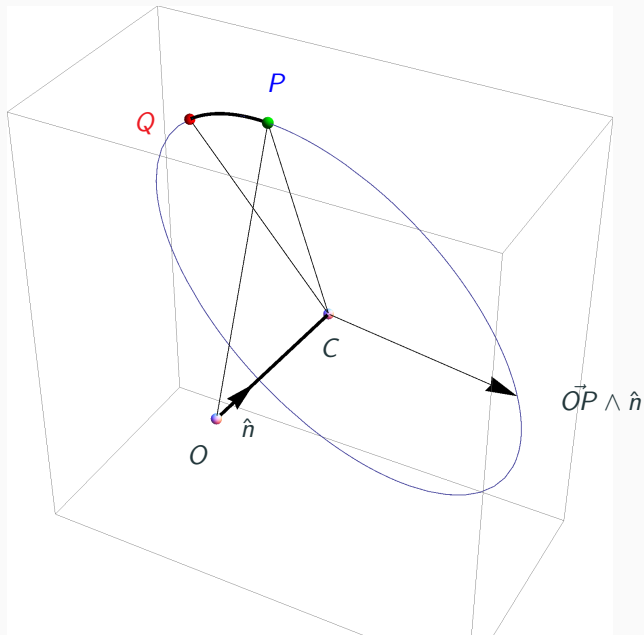
$$\vec{OQ} = R_{\theta, n} \vec{OP}$$

... avec la matrice de rotation

$$R_{\theta,n} = \cos \theta I + (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta [\hat{n} \wedge]$$

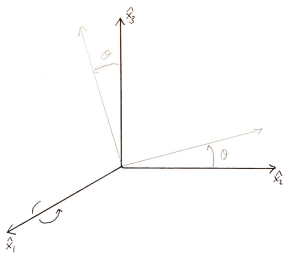
$$R_{\theta,n} = \cos \theta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + (1 - \cos \theta) \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_1 n_2 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_1 n_3 & n_2 n_3 & n_3^2 \end{pmatrix} \\ + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

rotation d'axe \hat{n} et d'angle θ



$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

le repère tourne, le point reste fixe



$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2 + \gamma \hat{x}_3 \\ &= \alpha' \hat{x}'_1 + \beta' \hat{x}'_2 + \gamma' \hat{x}'_3\end{aligned}$$

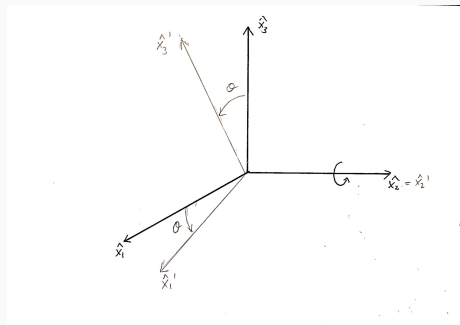
$$\hat{n} = \hat{x}_1$$

$$n_1 = 1, n_2 = 0, n_3 = 0$$

$$R_{\theta, \hat{n}}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = R_{\theta, \hat{n}}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

te repère tourne, le point reste fixe



$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2 + \gamma \hat{x}_3 \\ &= \alpha' \hat{x}'_1 + \beta' \hat{x}'_2 + \gamma' \hat{x}'_3\end{aligned}$$

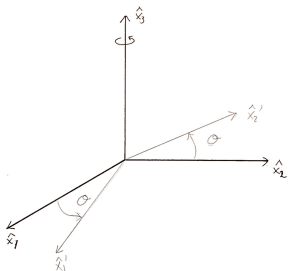
$$\hat{n} = \hat{x}_2$$

$$n_1 = 0, n_2 = 1, n_3 = 0$$

$$R_{\theta, n}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = R_{\theta, n}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

le repère tourne, le point reste fixe



$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2 + \gamma \hat{x}_3 \\ &= \alpha' \hat{x}'_1 + \beta' \hat{x}'_2 + \gamma' \hat{x}'_3\end{aligned}$$

$$\hat{n} = \hat{x}_3$$

$$n_1 = 0, n_2 = 0, n_3 = 1$$

$$R_{\theta, n}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix} = R_{\theta, n}^{-1} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

formule de Poisson

Un vecteur quelconque \vec{r} subit une rotation infinitésimale (il ne s'allonge pas et ne rétrécit pas) de vitesse angulaire $\vec{\omega}$

$$\dot{\vec{r}} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

démonstration

en utilisant

$$R_{\theta,n} = \cos \theta I + (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

...dans la formulation de la dérivée...

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}} &= \frac{\vec{r}(t + dt) - \vec{r}(t - dt)}{2dt} \\ &= \frac{1}{2dt} (R_{\theta,n}(d\theta) - R_{\theta,n}(-d\theta)) \vec{r} \\ &= \frac{1}{2dt} (2 \sin(d\theta) [\hat{n} \wedge]) \vec{r} \\ &= \frac{d\theta}{dt} [\hat{n} \wedge] \vec{r} = [\vec{\omega} \wedge] \vec{r} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}\end{aligned}$$

Remarques

- $\sin(d\theta) = d\theta$ car $d\theta$ petit
- Les termes en $\cos(d\theta)$ disparaissent car $\cos(-d\theta) = \cos(d\theta)$

autre démonstration: développement de Taylor

à partir de

$$R_{\theta,n} = \cos \theta I + (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

cela donne

$$\vec{OQ} = \vec{OP}(t + dt) = R_{\theta,n} \vec{OP}(t) \approx \left[R_{\theta,n}(0) + \left. \frac{\partial R_{\theta,n}}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} d\theta \right] \vec{OP}(t)$$
$$\vec{OP}(t + dt) = \left[I + (1 - 1) \hat{n} \hat{n}^T + d\theta \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \right] \vec{OP}(t)$$

rotation infinitésimale: la formule de Poisson

Soit \vec{OP} tel que $\|\vec{OP}\| = \text{cte.}$, on a

Formule de Poisson

$$\frac{\vec{OP}(t + dt) - \vec{OP}(t)}{dt} = \hat{n} \frac{d\theta}{dt} \wedge \vec{OP}$$

$$\vec{\dot{O}P} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

car

$$\vec{\omega} = \hat{n} \frac{d\theta}{dt}$$

... autre méthode ...

En dérivant directement en $\theta = 0$

On a en $\theta = 0$, $R(\theta) = R(0)$ avec \vec{OP} fixe:

$$\vec{OQ} = R(0)\vec{OP} = \vec{OP}$$

On calcule la dérivée de \vec{OQ} en $\theta = 0$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{OQ}} &= \dot{R}(0)\vec{OP} \\ &= -\sin(0)\dot{\theta}\vec{OP} + \sin(0)\dot{\theta}\hat{n}\hat{n}^T\vec{OP} + \cos(0)\dot{\theta}\hat{n} \wedge \vec{OP} \\ &= \dot{\theta}\hat{n} \wedge \vec{OP} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \\ &= \vec{\omega} \wedge \vec{OQ}\end{aligned}$$

Les rotations ne sont pas commutatives (en général)

$$R_{\theta_1, n_1} R_{\theta_2, n_2} \neq R_{\theta_2, n_2} R_{\theta_1, n_1}$$

... par contre les rotations infinitésimales d'axe concourant sont commutatives ... et s'additionnent !

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 = \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$$

démonstration de l'addition des rotations infinitésimales

Composition des rotations $R = R_2 R_1$

Soit R_1 la rotation d'angle θ et d'axe \hat{n} suivie de la rotation R_2 d'angle ϕ et d'axe \hat{m}

$$\begin{aligned} R &= R_2 R_1 = (\cos \phi I + (1 - \cos \phi) \hat{m} \hat{m}^T + \sin \phi [\hat{m} \wedge]) \\ &\quad (\cos \theta I + (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta [\hat{n} \wedge]) \\ &= \cos \theta \cos \phi I + \cos \theta (1 - \cos \phi) \hat{m} \hat{m}^T + \cos \phi (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T \\ &\quad + \sin \phi (1 - \cos \theta) [\hat{m} \wedge] \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta (1 - \cos \phi) \hat{m} \hat{m}^T [\hat{n} \wedge] \\ &\quad + (1 - \cos \phi) (1 - \cos \theta) \hat{m} \hat{m}^T \hat{n} \hat{n}^T \\ &\quad + \cos \phi \sin \theta [\hat{n} \wedge] + \cos \theta \sin \phi [\hat{m} \wedge] + \sin \phi \sin \theta [\hat{m} \wedge] [\hat{n} \wedge] \end{aligned}$$

... dérivée ...

$$\begin{aligned}\dot{R} = & -(\dot{\theta} \sin \theta \cos \phi + \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi)I \\ & +(-\dot{\theta} \sin \theta(1 - \cos \phi) + \dot{\phi} \cos \theta \sin \phi)\hat{m}\hat{m}^T \\ & +(-\dot{\phi} \sin \phi(1 - \cos \theta) + \dot{\theta} \cos \phi \sin \theta)\hat{n}\hat{n}^T \\ & +(-\dot{\theta} \sin \theta \sin \phi + \dot{\phi} \cos \theta \cos \phi)[\hat{m}\wedge] \\ & +(-\dot{\phi} \sin \phi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \phi \cos \theta)[\hat{n}\wedge] \\ & +(\dot{\phi} \cos \phi(1 - \cos \theta) + \dot{\theta} \sin \phi \sin \theta)[\hat{m}\wedge]\hat{n}\hat{n}^T \\ & +(\dot{\theta} \cos \phi(1 - \cos \phi) + \dot{\phi} \sin \theta \sin \phi)\hat{m}\hat{m}^T[\hat{n}\wedge] \\ & +(\dot{\phi} \cos \phi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \phi \cos \theta)[\hat{m}\wedge][\hat{n}\wedge] \\ & +(\dot{\phi} \sin \phi(1 - \cos \theta) + \dot{\theta} \sin \theta(1 - \cos \phi))\hat{m}\hat{m}^T \hat{n}\hat{n}^T\end{aligned}$$

démonstration de l'addition des rotations infinitésimales

... évalué en $\theta = 0, \phi = 0$...

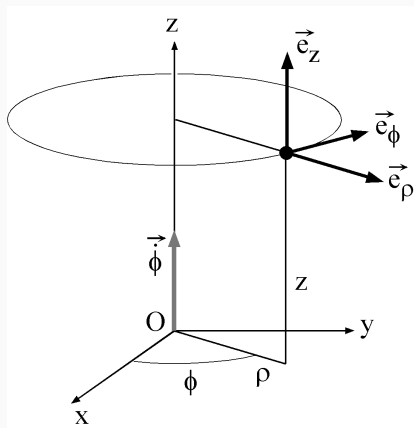
$$\begin{aligned}\dot{R} &= -(\dot{\theta} \sin 0 \cos 0 + \dot{\phi} \cos 0 \sin 0)I \\ &+ (-\dot{\theta} \sin 0(1 - \cos 0) + \dot{\phi} \cos 0 \sin 0)\hat{m}\hat{m}^T \\ &+ (-\dot{\phi} \sin 0(1 - \cos 0) + \dot{\theta} \cos 0 \sin 0)\hat{n}\hat{n}^T \\ &+ (-\dot{\theta} \sin 0 \sin 0 + \dot{\phi} \cos 0 \cos 0)[\hat{m}\wedge] \\ &+ (-\dot{\phi} \sin 0 \sin 0 + \dot{\theta} \cos 0 \cos 0)[\hat{n}\wedge] \\ &+ (\dot{\phi} \cos 0(1 - \cos 0) + \dot{\theta} \sin 0 \sin 0)[\hat{m}\wedge]\hat{n}\hat{n}^T \\ &+ (\dot{\theta} \cos 0(1 - \cos 0) + \dot{\phi} \sin 0 \sin 0)\hat{m}\hat{m}^T[\hat{n}\wedge] \\ &+ (\dot{\phi} \cos 0 \sin 0 + \dot{\theta} \sin 0 \cos 0)[\hat{m}\wedge][\hat{n}\wedge] \\ &+ (\dot{\phi} \sin 0(1 - \cos 0) + \dot{\theta} \sin 0(1 - \cos 0))\hat{m}\hat{m}^T\hat{n}\hat{n}^T \\ &= \dot{\theta}[\hat{n}\wedge] + \dot{\phi}[\hat{m}\wedge] \\ &= [\vec{\omega}_1\wedge] + [\vec{\omega}_2\wedge] = [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2)\wedge]\end{aligned}$$

... et on a bien ...

$$\begin{aligned}\vec{OQ} = \vec{R} \vec{OQ} &= [(\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge] \vec{OQ} \\ &= (\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2) \wedge \vec{OQ}\end{aligned}$$

coordonnées

coordonnées cylindriques



coordonnées ρ, ϕ, z

Expressions des coordonnées cartésiennes x_1, x_2 et x_3 en fonction des coordonnées ρ, ϕ et z :

$$x = x_1 = \rho \cos \phi$$

$$y = x_2 = \rho \sin \phi$$

$$z = x_3 = z$$

repère cylindrique

Soit un repère attaché au point P et s'aligne avec le repère cylindrique

$$(P, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$$

Ainsi que le repère de vecteurs générateurs identiques mais attaché en O

$$(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$$

Soit un point Q arbitraire. On va exprimer \vec{OQ} selon deux repères.

coordonnées α, β, γ
... dans le repère fixe

$$(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

coordonnées α', β', γ'
... dans le repère qui se déplace

$$(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$$

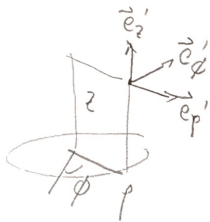
coordonnées cylindriques



$$\hat{x}_3' = \vec{e}_z$$

$$\hat{x}_2' = \vec{e}_\phi$$

$$\hat{x}_1' = \vec{e}_r$$



$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ +\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \delta' \end{pmatrix}$$

(9 \hat{x}_1, \hat{x}_2)

$$\begin{pmatrix} 0, \hat{x}_1, \hat{x}_2 \\ = (0, \vec{e}_r, \vec{e}_\phi \end{pmatrix}$$

ainsi $\alpha' \vec{e}_r + \beta' \vec{e}_\phi + \delta' \vec{e}_z = \alpha \hat{x}_1 + \beta \hat{x}_2 + \delta \hat{x}_3$

... ce qui donne la correspondance ...

$$\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \\ \gamma' \end{pmatrix}_{(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}_{(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)}$$

...explications ...

On utilise la rotation d'angle ϕ qui tourne le repère fixe selon l'axe 3 d'un angle ϕ .

... lorsque le repère cylindrique subit ...

$$\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$$

... conséquence sur ...

la vitesse \vec{v}_P et l'accélération \vec{a}_P dans le référentiel absolu (galiléen) mais exprimées à l'aide du repère

$$(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi, \vec{e}_z)$$

vitesse

$$\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{OP}} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\vec{e}}_\rho + \dot{z} \vec{e}_z$$

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\rho = \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{e}}_\phi = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_\phi = \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_\phi = -\dot{\phi} \vec{e}_\rho$$

... ainsi ...

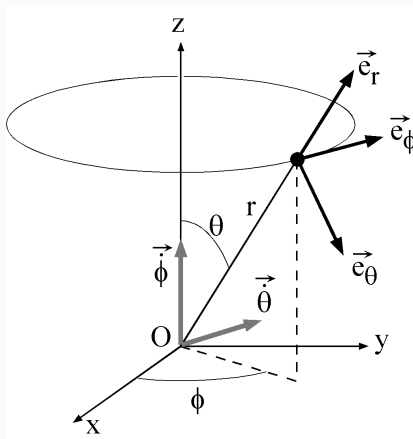
$$\vec{v}_P = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \dot{\phi} \rho \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z$$

accélération

$$\begin{aligned}\vec{a}_P &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\rho + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\dot{\rho}\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\rho\dot{\vec{e}}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= \ddot{\rho}\vec{e}_\rho + \dot{\rho}\dot{\vec{e}}_\phi + \rho\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{\phi}\dot{\rho}\vec{e}_\phi - \dot{\phi}^2\rho\vec{e}_\rho + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z\end{aligned}$$

$$\vec{\vec{O}}P = (\ddot{\rho} - \dot{\phi}^2\rho)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z$$

coordonnées sphériques



repère sphérique

Soit un repère attaché au point P et s'aligne avec le rayon vecteur \vec{r} et les axes définis par les angles ϕ et θ

$$(P, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{e}_r)$$

Ainsi que le repère de vecteurs générateurs identiques mais attaché en O

$$(O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{e}_r)$$

Soit un point Q arbitraire. On va exprimer \vec{OQ} selon deux repères.

coordonnées α, β, γ
... dans le repère fixe

$$(O, \hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$$

coordonnées $\alpha'', \beta'', \gamma''$
... dans le repère qui se déplace

$$(O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi, \vec{e}_r)$$

... ce qui donne la correspondance ...

$$\begin{pmatrix} \alpha'' \\ \beta'' \\ \gamma'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

... explications ...

On utilise deux rotations avec le formalisme de "tourner le repère". Axe 3, angle ϕ suivi d'axe 2' d'angle θ .

report des vitesses angulaires

$$\begin{aligned}\vec{\omega} &= \dot{\phi}\hat{x}_3 + \dot{\theta}\hat{x}'_2 \\ &= \dot{\phi}\hat{x}'_3 + \dot{\theta}\hat{x}'_2\end{aligned}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta\dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \cos\theta\dot{\phi} \end{pmatrix}$$

autrement dit

$$\vec{\omega} = -\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\theta + \dot{\theta}\vec{e}_\phi + \cos\theta\dot{\phi}\vec{e}_r$$

vitesse

$$\vec{OP} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{OP}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vec{e}}_r$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = \begin{vmatrix} \vec{e}_\theta & -\sin\theta\dot{\phi} & 0 \\ \vec{e}_\phi & \dot{\theta} & 0 \\ \vec{e}_r & \cos\theta\dot{\phi} & 1 \end{vmatrix} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{v}_P = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi$$

accélération

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{O}P} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\vec{e}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\theta \\ &\quad + \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\sin\theta\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + r\sin\theta\dot{\theta}\dot{\vec{e}}_\phi \\ &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}(\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi) + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &\quad + r\dot{\theta}(\cos\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi - \dot{\theta}\vec{e}_r) + \dot{r}\sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_\phi + r\cos\theta\dot{\theta}\dot{\phi}\vec{e}_\phi \\ &\quad r\sin\theta\ddot{\phi}\vec{e}_\phi + r\sin\theta\dot{\theta}(-\cos\theta\dot{\phi}\vec{e}_\theta - \sin\theta\dot{\phi}\vec{e}_r)\end{aligned}$$

... regroupement ...

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{O}P} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta)\vec{e}_r \\ &\quad + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos\theta \sin\theta)\vec{e}_\theta \\ &\quad + (r\ddot{\phi} \sin\theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} \cos\theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin\theta)\vec{e}_\phi\end{aligned}$$