V. Oscillateur harmonique II

oscillateur forcé, oscillateur avec amortissement, phénomènes de battement et de résonance

Ph. Müllhaupt

Programme — V. Oscillateur harmonique II

1. oscillateur amorti
2. oscillateur amorti et forcé
3. résonance (forcé, cas général)
4. battement (non-amorti et forcé)
5. complément : aspects énergétiques
6. complément: solution particulière à l'aide des nombre complexes

oscillateur amorti

oscillateur harmonique amorti

Au système masse ressort traité à la leçon sur l'oscillateur harmonique I, on ajoute une force supplémentaire due au frottement. Le système ne conserve ainsi plus l'énergie. L'amplitude de l'oscillation diminue au cours du temps. La force de frottement est dite visqueuse et cette nouvelle force est proportionnelle à la vitesse par un facteur de proportionalité b.

schéma

modélisation et équation différentielle

$$\|\vec{AO}\| = l_0$$

$\longrightarrow x$

fixé en A. L'origine O au niveau de l_0

b coefficient de frottement visqueux

$$\boxed{\ddot{x} = -\frac{b}{m}\dot{x} - \frac{k}{m}x}$$

détails pour obtenir l'équation différentielle

$$m\,\ddot{\vec{AP}} \;=\; \vec{F}_r^{\,A\to P} + \vec{F}_f = -k(\vec{AP} - l_0\,\widehat{AP}) + \vec{F}_f$$

modèle de la force de frottement ($\vec{v}$ désigne la vitesse):

$$\boxed{\vec{F}_f = -b\,\vec{v}}$$

$$\begin{aligned}
\vec{AO} &= l_0\,\hat{x} \\
\vec{AP} - l_0\widehat{AP} &= \vec{AO} + \vec{OP} - l_0\,\hat{x} = \vec{OP} \\
\dot{\vec{AP}} &= \dot{\vec{AO}} + \dot{\vec{OP}} = 0 + \dot{x}\,\hat{x} \\
\ddot{\vec{AP}} &= \ddot{\vec{AO}} + \ddot{\vec{OP}} = 0 + \ddot{x}\,\hat{x} \\
\vec{F}_f &= -b\dot{\vec{AP}} = -b\dot{\vec{OP}} = -b\,\dot{x}\,\hat{x} \\
m\ddot{\vec{AP}} &= m\ddot{x}\hat{x} = \vec{F}_r^{\,A\to P} + \vec{F}_f = -k\,x\,\hat{x} - b\,\dot{x}\,\hat{x}
\end{aligned}$$

$$\boxed{m\ddot{x}\,\hat{x} = -kx\,\hat{x} - b\dot{x}\,\hat{x}}$$

solution de l'équation différentielle

définition (équation différentielle homogène)

Une équation différentielle linéaire dont chaque terme contient la variable indéterminée (ici x) ou une de ses dérivées ($\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\ldots$,), sans contenir de terme supplémentaire, est appelée une équation différentielle <u>homogène</u>.

L'équation différentielle homogène à résoudre $m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0$ peut se mettre sous la forme

$$\boxed{\ddot{x} + 2\,\gamma\,\dot{x} + \omega_0^2\,x = 0}$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma &\triangleq \frac{b}{2m} && \text{facteur d'amortissement} \\ \omega_0 &\triangleq \sqrt{\frac{k}{m}} && \text{pulsation à vide} \end{aligned}$$

idée pour la résolution...

idée: transformer l'opérateur

$$\frac{d}{dt}$$

en une variable

$$\lambda$$

On transforme l'équation différentielle en une équation algébrique polynomiale facile à résoudre.

justification de cette idée

Pour une équation linéaire homogène, on peut restreindre la solution à une combinaison de fonctions exponentielles de la forme

$$\boxed{e^{\lambda t} \qquad \lambda \in \mathbb{C}}$$

En effet,

$$\frac{d}{dt} e^{\lambda t} = \lambda\, e^{\lambda t}$$

de telle sorte que

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x &= \lambda^2 e^{\lambda t} + 2\gamma\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} \\ &= \left(\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2\right)\, e^{\lambda t} \qquad (1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et pour garantir l'annulation pour tout instant du temps il faut que le facteur en paranthèse dans (1) soit nul (car $e^{\lambda t} \neq 0$, $\forall t$).

Ainsi

$$\boxed{\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0}$$

Le polynôme caractéristique est constitué, et égalé à zéro

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

dont les racines sont

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \\ &= -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \end{aligned}$$

$$\boxed{x_h(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}}$$

solution homogène

...trois cas sont à envisager...

1. $\gamma = \frac{b}{2m} > \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (frottement fort, ressort faible)

$$x_h(t) = C_1 e^{-\left(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\right)t}$$

2. $\gamma = \omega_0$

$$x_h(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t}$$

3. $\gamma < \omega_0$ (frottement faible, ressort fort)

$$x_h(t) = e^{-\gamma t}\left(\tilde{C}_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t) + \tilde{C}_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t)\right)$$

Les C_1, C_2, $\tilde{C}_1$ et $\tilde{C}_2$ sont des constantes d'intégrations qui sont obtenues à partir des conditions initiales.

oscillateur amorti et forcé

Oscillateur forcé avec amortissement

Equation de départ

$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = A\sin(\omega t)$$

Réécriture

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x &= A\sin(\omega t) \\ \gamma &= \frac{b}{2m} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

solution homogène

Le polynôme caractéristique est constitué, et égalé à zéro

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega_0^2 = 0$$

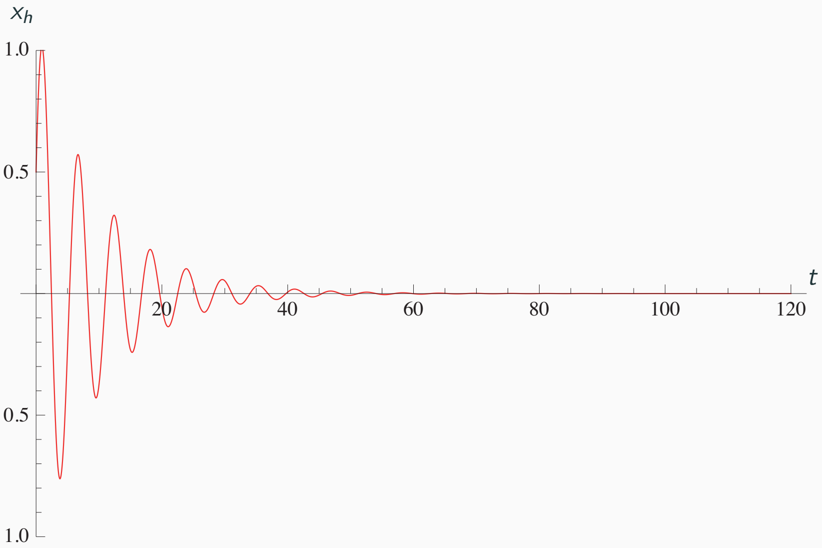
dont les racines sont

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

solution homogène

...la même que dans le cas non forcé !

solution homogène ($\gamma < \omega_0$)



solution particulière — le régime permanent

La solution particulière est une solution quelconque de l'équation différentielle. Lors de présence de frottement, on constate que la solution homogène décroit avec le temps (on appelle ce phénomène le transitoire). Il ne reste alors plus qu'un mouvement oscillatoire à la même fréquence que le terme qui force l'équation différentielle. Appelons ω la pulsation du terme forçant. La solution particulière est déphasée et d'amplitude diffŕente que le terme forçant, mais possède la même pulsation. Ce régime est appelé le régime permanent. Une solution particulière, notée $x_p(t)$ se met donc sous la forme avec α_0 et α_1 des constantes réelles qui vont dépendre de paramètres physiques k, m, b et de la pulsation ω du terme forçant.

$$\boxed{x_p(t) \triangleq \alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)}$$

oscillateur amorti et forcé — solution particulière

à résoudre

$$\boxed{\ddot{x}_p + \frac{b}{m}\dot{x}_p + \frac{k}{m}x_p = A\,\sin(\omega\,t)}$$

en partant de notre solution particulière proposée et en prenant la dérivée par rapport au temps:

$$\begin{aligned}
x_p(t) &= \alpha_0\,\sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t) \\
\dot{x}_p(t) &= \alpha_0\,\omega\,\cos(\omega\,t) - \alpha_1\,\omega\,\sin(\omega\,t) \\
\ddot{x}_p(t) &= -\alpha_0\,\omega^2\,\sin(\omega t) - \alpha_1\,\omega^2\,\cos(\omega t)
\end{aligned}$$

solution particulière

$$
\begin{aligned}
\ddot{x}_p + \frac{b}{m}\dot{x}_p + \frac{k}{m}x_p &= -\alpha_0\,\omega^2 \sin(\omega t) - \alpha_1\,\omega^2 \cos(\omega t) \\
&\quad + \frac{b}{m}\left(\alpha_0\,\omega \cos(\omega t) - \alpha_1\,\omega \sin(\omega t)\right) \\
&\quad + \frac{k}{m}\left(\alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)\right) \\
&= A \sin(\omega t)
\end{aligned}
$$

solution particulière

les termes devant $\cos(\omega t)$ doivent tous s'équilibrer. De même les terms contenant $\sin(\omega t)$ doivent également s'équilibrer. Ainsi en collectant les termes devant $\sin(\omega t)$ et ceux devant $\cos(\omega t)$, on obtient deux équations indépendantes:

$$\begin{aligned} \text{devant } \sin(\omega t): &\quad -\alpha_0\,\omega^2 - \tfrac{b}{m}\alpha_1\,\omega + \tfrac{k}{m}\alpha_0 = A \\ \text{devant } \cos(\omega t): &\quad -\alpha_1\,\omega^2 + \tfrac{b}{m}\alpha_0\,\omega + \tfrac{k}{m}\,\alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

solution particulière – factorisation de α_0 et α_1

On factorise α_0 et α_1 dans les deux équations qui s'écrivent

$$\begin{aligned}
\alpha_0\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)-\alpha_1\left(\frac{b}{m}\omega\right) &= A \\
\alpha_0\left(\frac{b}{m}\omega\right)+\alpha_1\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right) &= 0
\end{aligned}$$

L'objectif est d'étudier la dépendance de l'amplitude $\sqrt{\alpha_0^2+\alpha_1^2}$ en fonction des paramètres, k, m, b et surtout ω car c'est le seule paramètre que l'on peut facilement ajuster !

solution particulière – écriture matricielle

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{b}{m}\omega \\ \frac{b}{m}\omega & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

en prenant l'inverse de la matrice:

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & -\frac{b}{m}\omega \\ \frac{b}{m}\omega & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \frac{b^2}{m^2}\omega^2} \begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \omega^2 & \frac{b}{m}\omega \\ -\frac{b}{m}\omega & \frac{k}{m} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ 0 \end{pmatrix}$$

solution particulière – résumé

la solution particulière s'écrit

$$\boxed{x_p(t) = \alpha_0 \sin(\omega\, t) + \alpha_1 \cos(\omega\, t)}$$

avec

$$\begin{aligned}
\alpha_0 &= \frac{1}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) A \\
\alpha_1 &= -\frac{\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\,\frac{b}{m}\, A \\
\omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\gamma &= \frac{b}{2m}
\end{aligned}$$

solution particulière – étude du dénominateur

étudions le dénominateur

$$\boxed{\left(\frac{k}{m}-\omega^2\right)^2+\frac{b^2}{m^2}\omega^2=\omega^4+\left(\frac{b^2}{m^2}-2\frac{k}{m}\right)\omega^2+\frac{k^2}{m^2}}$$

il devient minimum à ce que l'on appelle la pulsation de résonance ω_r, ce qui engendre une amplitude $\sqrt{\alpha_0^2+\alpha_1^2}$ maximale de la solution particulière ! Changeons de variable et posons $\nu \triangleq \omega^2$.

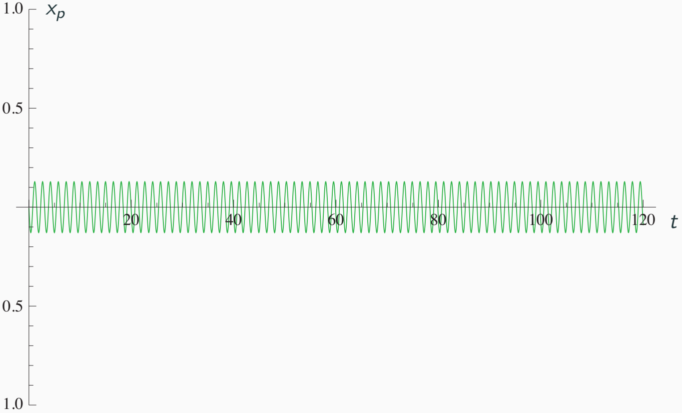
$$\nu^2+\left(\frac{b^2}{m^2}-2\frac{k}{m}\right)\nu+\frac{k^2}{m^2}$$

il devient minimum lorsque la dérivée par rapport à ν est nulle:

$$\left.\frac{d}{d\nu}\right|_{\nu=\nu_r}\left(\nu^2+\left(\frac{b^2}{m^2}-2\frac{k}{m}\right)\nu+\frac{k^2}{m^2}\right)=2\nu_r+\frac{b^2}{m^2}-\frac{2k}{m}=0$$

$$\boxed{\omega_r \triangleq \sqrt{\nu_r}=\sqrt{\frac{k}{m}-\frac{b^2}{2\,m^2}}}$$

solution particulière ($\gamma < \omega_0$)



solution complète

On a pour les trois cas $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$ ...

1. $\gamma > \omega_0$

$$
\begin{aligned}
x(t) \quad = \quad & C_1 e^{-\left(\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} + C_2 e^{-\left(\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\right)t} \\
& + \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \\
& \left((\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t) - 2\gamma\omega\cos(\omega t)\right)
\end{aligned}
$$

2. $\gamma = \omega_0$

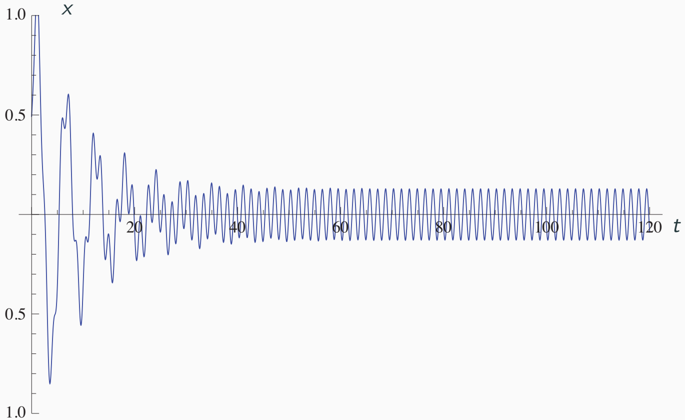
$$
\begin{aligned}
x(t) \quad = \quad & (C_1 + C_2 t)e^{-\gamma t} + \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} \\
& \left((\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t) - 2\gamma\omega\cos(\omega t)\right)
\end{aligned}
$$

solution complète

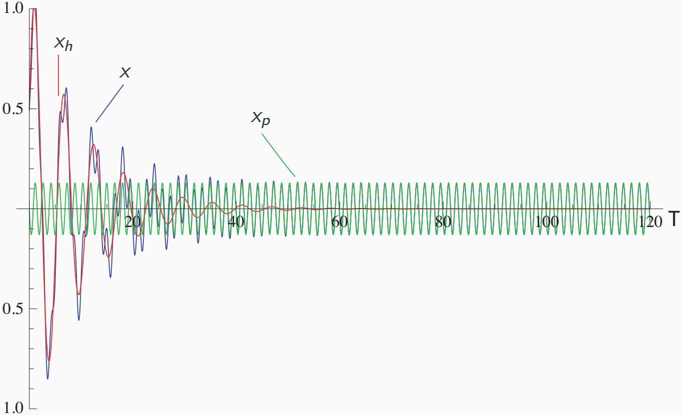
3. $\gamma < \omega_0$

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t}\left(C_1 \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t) + C_2 \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\, t)\right) \\ &\quad + \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\left((\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - 2\gamma\omega\cos(\omega t)\right) \end{aligned}$$

solution complète ($\gamma < \omega_0$)



Solutions homogène, particulière et complète ($\gamma < \omega_0$)



résonance (forcé, cas général)

Résonance

On constate que lorsque la pulsation forçante ω se rapproche de la pulsation naturelle ω_0, l'amplitude de la solution complète augmente énormément. On amplifie ainsi l'amplitude initiale (c'est le phénomène de la balançoire, des petites poussées sur celle-ci fini par l'amener très haut lorsque on entretient à la même fréquence que celle de la balançoire).

Résonance

maximum d'amplitude

Lorsque ω, la pulsation de la composante de l'accélération que l'on impose à la masse depuis l'extérieur, change, l'amplitude A_m de la solution particulière x_p change. L'amplitude atteint son maximum à la pulsation de résonance ω_r.

$$\begin{aligned} A_m &= \max x_p \\ \omega_r &= \arg\max x_p \end{aligned}$$

remarque

La résonance fait son apparition uniquement lorsque les racines du polynôme caractéristique sont complexes. Contrairement au cas sans frottement, l'amplitude ne peut pas devenir infinie.

Amplitude A_m en fonction de la pulsation d'excitation ω

$$\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\left[(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t)-2\gamma\omega\cos(\omega t)\right] \\ &=: A_m \sin(\omega t+\phi) \end{aligned}$$

déphasage en fonction de la pulsation ω

L'angle ϕ est le déphasage entre le mouvement harmonique de la composante de l'accélération imposée au point matériel et le mouvement harmonique de la position de la masse en considérant le mouvement asymptotique de celle-ci (la solution particulière).

$$\tan(\phi) = -\frac{2\gamma\,\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)}$$

calcul de A_m

Par trigonométrie ou par pythagore avec les phaseurs

$$\begin{aligned}
A_m &= \sqrt{\frac{A^2(\omega_0^2-\omega^2)^2}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2)^2}+\frac{4A^2\gamma^2\omega^2}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2)^2}} \\
&= \sqrt{\frac{A^2[(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2]}{((\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2)^2}} \\
&= A\frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}}
\end{aligned}$$

A_m atteint son maximum lorsque $(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2$ est au minimum.

Calcul de l'extremum
Cherchons l'extremum de $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2$ en fonction de ω. En posant $\nu := \omega^2$

$$\begin{aligned}&\omega^4 - 2\omega_0^2\omega^2 + 4\gamma^2\omega^2 + \omega_0^4\\ &= \nu^2 + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2)\nu + \omega_0^4\end{aligned}$$

et en annulant la dérivée de cette expression par rapport à ν

$$2\nu + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2) = 0$$

ce qui donne

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Résonance

Pulsation de résonance
La pulsation de la résonance ω_r est fonction des paramètres physiques, constante de rigidité du ressort k, masse m et coefficient de frottement visqueux b :

$$\begin{aligned} \omega_r &= \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} \\ &= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} \end{aligned}$$

Elle correspond à la valeur de la pulsation d'excitation afin d'atteindre le régime harmonique asymptotique d'amplitude maximale.

Amplitude A_m du régime permanent (sol. part.)

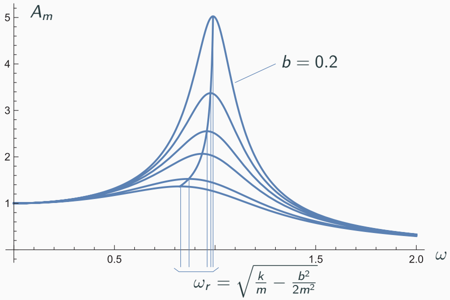


Figure 1: $k = 1$, $m = 1$ et $b = 0.2$, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7 et 0.8

Phase ϕ du régime permanent (sol. part.)

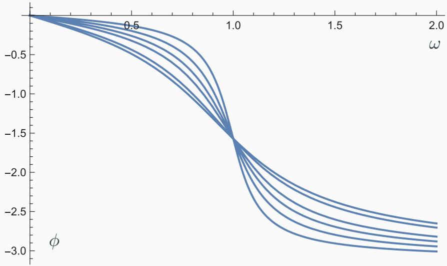


Figure 2: $k = 1$, $m = 1$ et $b = 0.2$, 0.3, 0.4, 0.5, 0.7 et 0.8

battement (non-amorti et forcé)

oscillateur forcé sans amortissement

Excitation avec une composante de l'accélération sinusoïdale d'amplitude A **et de pulsation** ω

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = A\sin(\omega t)$$

Pulsation naturelle $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Le paramètre $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ joue un rôle important dans le cas non forcé

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 &= A\sin(\omega t) \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \end{aligned}$$

Solution homogène

Solution x_h sans second membre

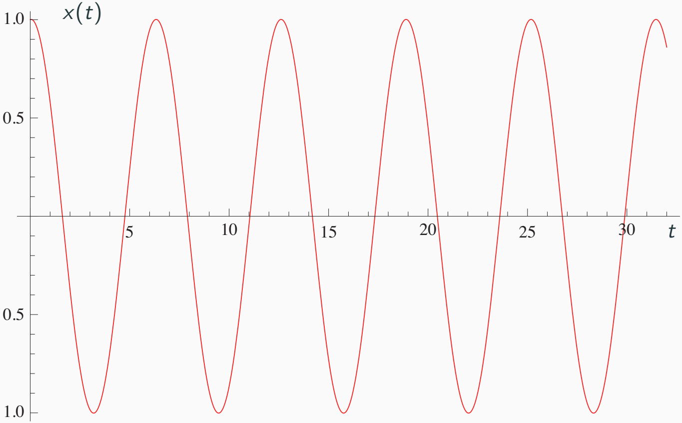
$$\ddot{x}_h + \omega_0^2 x_h = 0$$

Même solution que dans le cas non forcé

$$x_h(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)$$

avec C_1, C_2 les constantes d'intégration à déterminer

Solution homogène ($k = m = 1,\ C_1 = 1,\ C_2 = 0$)



solution particulière

Superposition des fonctions de bases sin **et** cos

- Même pulsation ω que l'accélération forçante.
- Combinaison de sin et cos pour avoir la bonne phase.
- Représente le mouvement lorsque tous les transitoires ont diparus à cause de l'amortissement.
- C'est le mouvement asymptotique.

sin **et** cos **forment une base**

$$x_p(t) = \alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)$$

avec $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ des coefficients à déterminer.

solution particulière

… en substituant dans l'équation de départ…

$$-\alpha_0\omega^2\sin(\omega t) - \alpha_2\omega^2\cos(\omega t) + \omega_0^2\alpha_0\sin(\omega t) + \omega_0^2\alpha_2\cos(\omega t) = A\sin(\omega t)$$

… en regroupant les termes devant $\sin(\omega t)$ **et** $\cos(\omega t)$**…**
deux équations algébriques pour les deux inconnues α_0 et α_1 sont obtenues

$$\begin{aligned}(\omega_0^2 - \omega^2)\alpha_0 &= A\\(\omega_0^2 - \omega^2)\alpha_1 &= 0\end{aligned}$$

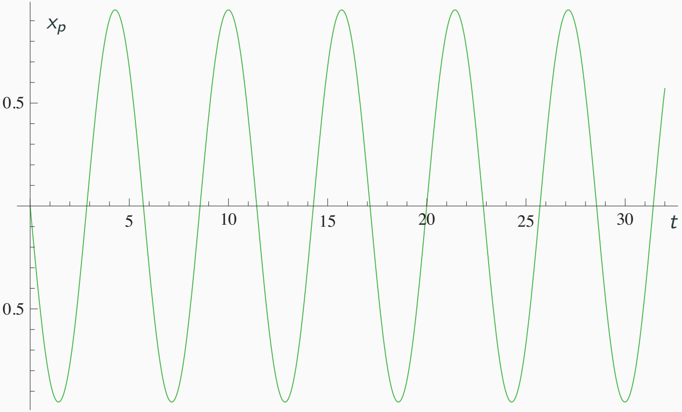
solution particulière

Ainsi, $\alpha_1 = 0$ et $\alpha_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}$.

La solution particulière est

$$x_p = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

solution particulière



La solution complète

Comme l'équation est linéaire...
La solution complète est la superposition de la solution homogène et de la solution particulière

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin(\omega t)$$

Conditions initiales

On substitue $x(0)$ et $\dot{x}(0)$ ...
... par les expressions des constantes d'intégration (C_1 et C_2)

$$\begin{aligned} x_0 = x(0) &= C_1 \\ \dot{x}_0 = \dot{x}(0) &= \omega_0 C_2 + \frac{A\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \end{aligned}$$

... ainsi ...

$$C_1 = x_0$$

et

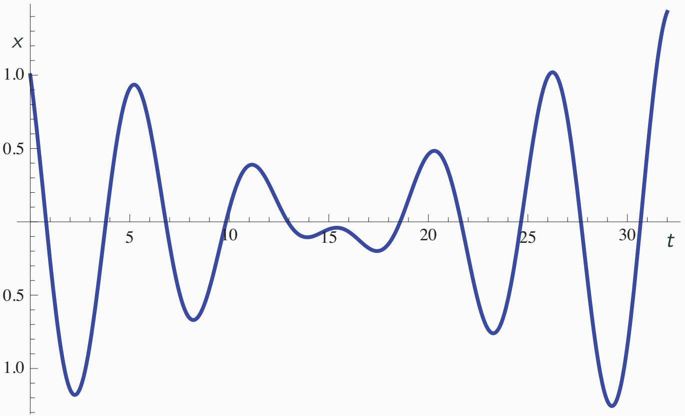
$$C_2 = \frac{1}{\omega_0}\left(\dot{x}_0 - \frac{A\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)$$

Conditions initiales

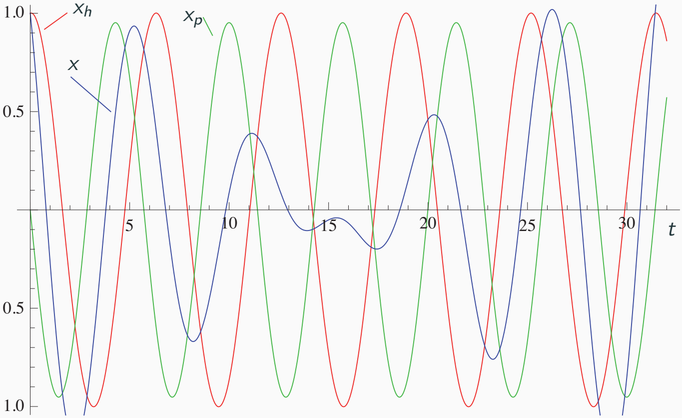
La solution complète devient

$$x(t) = \frac{1}{\omega_0}\left(\dot{x}_0 - \frac{A\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right)\sin(\omega_0 t) + x_0\cos(\omega_0 t) + \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\sin(\omega t)$$

Solution complète



Solutions homogène, particulière et complète



Pour $x_0 = 0$, deux contributions à la solution complète...

$$x(t) = \tilde{B}(\tilde{A}\sin(\omega t) + \sin(\omega_0 t))$$

... en utilisant les identités trigonométriques ...

$$\begin{aligned} \sin(a+b) &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ -\sin(a-b) &= -\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{aligned}$$

$$a = \frac{\omega - \omega_0}{2}$$

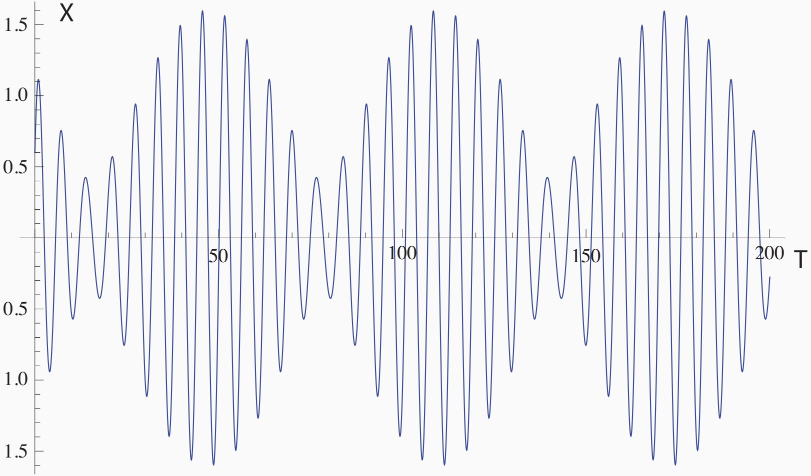
$$b = \frac{\omega + \omega_0}{2}$$

... on arrive à ...

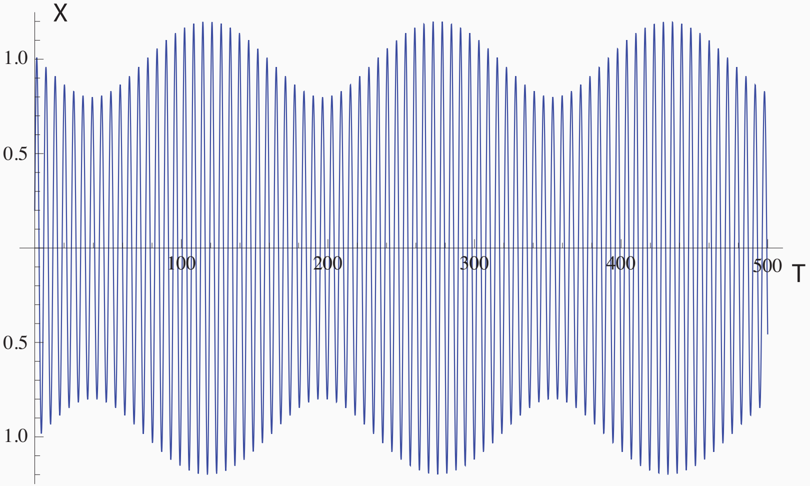
$$\begin{aligned} x(t) &= \tilde{B}(1-\tilde{A})\sin\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right)+ \\ &\quad \tilde{B}(1+\tilde{A})\cos\left(\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_0+\omega}{2}t\right) \end{aligned}$$

Modulation d'une fréquence rapide par une lente
Lorsque la pulsation ω est proche de ω_0, la pulsation $(\omega-\omega_0)/2$ est petite par rapport à $(\omega+\omega_0)/2$: Une fréquence lente module (enveloppe) une fréquence rapide.

battement



battement



Complément sur les aspects énergétiques

complément : aspects énergétiques

puissance moyenne en régime harmonique forcé

puissance instantanée

$$P = Fv$$

puissance moyenne

$$< P >= \frac{1}{T} \int_0^T Fvdt$$

Rappel des notations

- A : accélération maximale issue de la force appliquée pour forcer le régime harmonique
- $\gamma = \frac{b}{2m}$: facteur d'amortissement
- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$: pulsation naturelle (pulsation en l'absence de frottement appelée aussi pulsation à vide)
- ω : pulsation du régime forcé

position, vitesse, et acc. de la masse en régime harmonique forcé harmonique

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\left((\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t)-2\gamma\omega\cos(\omega t)\right)\\
\dot{x}_p(t) &= \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\left(\omega(\omega_0^2-\omega^2)\cos(\omega t)+2\gamma\omega^2\sin(\omega t)\right)\\
\ddot{x}_p(t) &= \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\left(-\omega^2(\omega_0^2-\omega^2)\sin(\omega t)+2\gamma^2\omega^3\cos(\omega t)\right)
\end{aligned}
$$

... en utilisant l'accélération de la masse ...

$$< P >= \frac{1}{T}\int_0^T Fvdt = m\frac{1}{T}\int_0^T \ddot{x}_p\,\dot{x}_p\,dt$$

.... en remarquant que $\int_0^T \sin(\omega t)\cos(\omega t)dt = 0$**...**

$$\begin{aligned} < P > &= \frac{mA^2 2\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t)dt \\ &= \frac{mA^2 2\gamma\omega^2}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}\frac{1}{T}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2\omega t)}{4\omega}\right]_0^T \end{aligned}$$

... récapitulation ...

$$< P >= \frac{1}{2} m A^2 \frac{2\gamma\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

... que l'on peut réécrire ...

$$< P >= \frac{1}{2} m A^2 \frac{1}{2\gamma} \frac{1}{\left(\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{4\gamma^2\omega^2}\right) + 1} = \frac{1}{2} m A^2 \tau \frac{1}{\left(\frac{(\omega_0^2-\omega^2)^2}{(\omega/\tau)^2}\right) + 1}$$

facteur de qualité de l'oscillateur (régime harmonique non forcé)

définition

$$Q = 2\pi \frac{\text{énergie cinétique + potentielle sur un cycle}}{\text{énergie dissipée sur un cycle}}$$

... on peut montrer que l'énergie cinétique et potentielle évolue selon ...

$$E(t) = \frac{1}{2} k C^2 e^{-t/\tau}$$

avec C une constante qui dépend des conditions initiales

$$\tau = \frac{1}{2\gamma}$$

Théorème

$$Q = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\tau$$

et c'est un nombre sans dimension et il ne dépend pas des conditions initiales

Démonstration

Durée d'un cycle est $\frac{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}}{2\pi}$. Ainsi la perte d'énergie par cycle est

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \left| \frac{dE}{dt} \right| = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \frac{1}{\tau} E$$

et par conséquent

$$Q = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}\tau = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\ \frac{m}{b}$$

complément: solution particulière à l’aide des nombre complexes

Complément sur la solution particulière à l'aide des nombre complexes

solution particulière

Décomposition

$$A \sin(\omega t) = A \left(\frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \right)$$

Calcul des contributions $C_+ e^{i\omega t}$ **et** $C_- e^{-i\omega t}$

$$\begin{aligned} \left(-C_+\omega^2 + 2C_+ i\gamma\omega + C_+\omega_0^2\right) e^{i\omega t} &= \frac{A}{2i} e^{i\omega t} \\ \left(-C_-\omega^2 - 2C_- i\gamma\omega + C_-\omega_0^2\right) e^{-i\omega t} &= -\frac{A}{2i} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

solution particulière

Calcul des facteurs C_+ et C_-

$$\begin{aligned} C_+ &= \frac{A}{2i}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega} = \frac{A}{2i}\frac{\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} = \frac{\alpha+\beta i}{2i} \\ C_- &= -\frac{A}{2i}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2-2i\gamma\omega} = -\frac{A}{2i}\frac{\omega_0^2-\omega^2+2i\gamma\omega}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2} = \frac{-\alpha+\beta i}{2i} \end{aligned}$$

solution particulière

Détermination de α et β

$$\begin{aligned}
\alpha &= \frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}(\omega_0^2-\omega^2) \\
\beta &= -\frac{A}{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\gamma^2\omega^2}2\gamma\omega
\end{aligned}$$

Solution réelle

$$
\begin{aligned}
x_p(t) &= C_+ e^{j\omega t} + C_- e^{-i\omega t} \\
&= \frac{\alpha + \beta i}{2i} e^{i\omega t} + \frac{-\alpha + \beta i}{2i} e^{-i\omega t} \\
&= \alpha_0 \sin(\omega t) + \alpha_1 \cos(\omega t)
\end{aligned}
$$

... récapitulation ...

$$x_p(t) = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}\left((\omega_0^2 - \omega^2)\sin(\omega t) - 2\gamma\omega\cos(\omega t)\right)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{b}{2m} \qquad \text{(facteur d'amortissement)} \\ \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(pulsation à vide)} \end{aligned}$$