IV. Travail, Energie, Puissance

Force et déplacement. Energie potentielle et cinétique. La puissance est la variation de l'énergie dans le temps (dérivée).

Ph. Müllhaupt

Programme — IV. travail, énergie, puissance

1. le travail
2. puissance instantanée et travail d'une force
3. potentiel

   potentiel du ressort (énergie potentielle élastique)

   potentiel de la gravité (énergie potentielle gravifique)

   gradient et potentiel
4. énergie

   énergie cinétique
5. unités [mksa]
6. conservation de l'énergie pour un point matériel avec potentiel
7. force de liason parfaite
8. stabilité

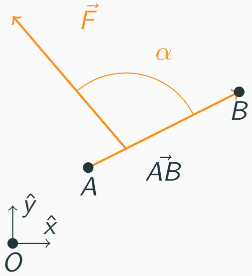
   critère de stabilité fondé sur l'énergie

   masse-ressort

   pendule simple

le travail

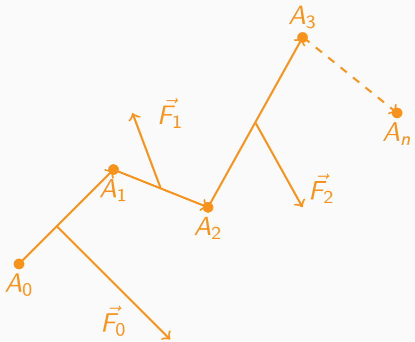
le travail d'une force constante sur un déplacement rectiligne



$$\boxed{W \triangleq \vec{F} \bullet \vec{AB} = \|\vec{F}\|\,\|\vec{AB}\|\,\cos\alpha}$$

si $\alpha = \frac{\pi}{2}$, pas de travail ! (exemple: liaison du sol)

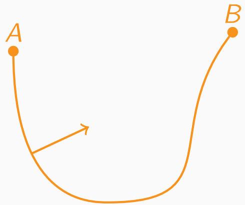
plusieurs segments, foces constantes par morceaux



$$\begin{aligned} W &\triangleq \vec{F}_0 \bullet \overrightarrow{A_0A_1} + \vec{F}_1 \bullet \overrightarrow{A_1A_2} + \dots \\ &\quad + \dots + \overrightarrow{F_{n-1}} \bullet \overrightarrow{A_{n-1}A_n} \end{aligned}$$

$$\boxed{W \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} \vec{F}_i \bullet \overrightarrow{A_iA_{i+1}}}$$

segments infinitésimaux (courbe régulière), forces variables



$$\boxed{W_{AB} \triangleq \int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dr} \qquad [\text{Joules}]}$$

constant par morceaux dans infiniments petits:

somme $\rightarrow$ intégrale

puissance instantanée et travail d’une force

puissance instantanée pour un point matériel et une force

Pour un point matériel sur lequel une force agit, le travail est la somme de la puissance instantanée multipliée par la durée durant laquelle elle s'exerce. La puissance est ainsi exprimée comme la dérivée temporelle du travail.

$$\boxed{W = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F} \bullet d\vec{r} = \int_A^B \left(\vec{F} \bullet \frac{\vec{dr}}{dt} \right) dt = \int_A^B P \, dt}$$

$$\boxed{P \triangleq \frac{dW}{dt}}$$

$$P = \vec{F} \bullet \frac{\vec{dr}}{dt} = \vec{F} \bullet \vec{v} \quad [\mathrm{Watts}]$$

Pour un point matériel, la puissance mécanique est donnée par le produit scalaire entre la force et la vitesse. Elle est exprimée en $[\mathrm{Watts}]$.

puissance instantanée

définition de la puissance instantanée

produit scalaire

$$P = \vec{F} \bullet \vec{v}$$

$$P(t) = \vec{F}(t) \bullet \vec{v}(t)$$

travail d'une force

On considère connu l'équation horaire $\vec{r}(t) = \vec{OP}(t)$

autre définition du travail de la force (à partir de la puissance $P = \vec{F}(t) \bullet \vec{v}(t)$)

$$W_{12} \triangleq \int_{t_1}^{t_2} P(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \bullet \vec{v}(t)dt$$

la relation

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

conduit à

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) \bullet d\vec{r}(t)$$

avec

$$d\vec{r}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}(t)dt$$

travail d'une force

On désigne par Γ, la trajectoire

lorsque la force dépend de la position $\vec{F}(\vec{r})$...

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \bullet d\vec{r}$$

remarque

- La composante normale de $\vec{F}$ par rapport à la trajectoire ne travaille pas !

travail infinitésimal

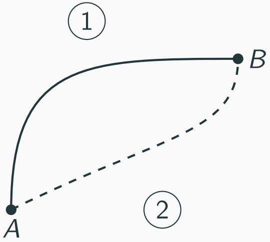
variation infinitésimale du travail

$$\boxed{\delta W = \vec{F} \bullet d\vec{r} = \|\vec{F}\| \|d\vec{r}\| \cos\theta}$$

potentiel

potentiel

Lorsque le travail ne dépend pas du chemin emprunté lors d'un déplacement d'un point matériel d'un point A vers un point B, il est possible d'introduire une fonction génératrice de la force appelée potentiel.



$$1 \int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dr} = 2 \int_A^B \vec{F} \bullet \vec{dr} = W_{AB}$$

pour tout chemin entre A et B

autrement dit, la force $\vec{F}$ est issue d'un potentiel lorsque, pour tout cycle C (on note également $\forall C$ pour indiquer, pour tout cycle C, et l'intégrale sur un chemin fermé par le symbole $\oint$ au lieu de $\int$)

$$\boxed{\oint_C \vec{F} \bullet \vec{dr} = 0 \qquad \forall C}$$

définition

Le potentiel, noté V, à un point P associé à une force dont le travail exercé ne dépend pas du chemin emprunté, est défini par l'opposé du travail pour amener le point de l'origine vers le point P. Il est donné par la formule

$$\boxed{V \triangleq -\int_O^P \vec{F} \bullet \vec{dr}}$$

Le signe négatif est une convention. Le parcours entre O et P est arbitraire.

exemples de potentiel

la force de gravité est issue du potentiel:

$$\boxed{V = m\,g\,h}$$

avec h la hauteur du point P, la masse m et la constante de gravité $g = 9.81$

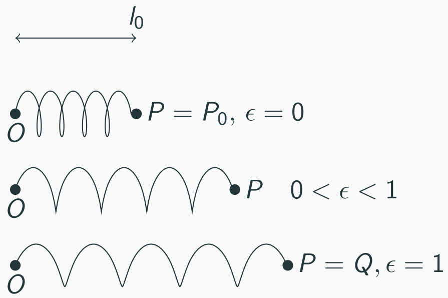
la force du ressort est issu du potentiel:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2}$$

avec l_0 la longueur à vide du ressort et l la longueur du ressort au point P et k la constante de rigidité du ressort

le potentiel est toujours une fonction scalaire

force du ressort et potentiel associé



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{OP_0} &= l_0\,\hat{x} \\
\overrightarrow{P_0Q} &= (l - l_0)\,\hat{x} \\
\widehat{P_0Q} &= \hat{x} = \widehat{OP}
\end{aligned}
$$

paramétrisation du déplacement:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + \epsilon\,\overrightarrow{P_0Q} \qquad \epsilon \in [0;1]$$

$$
\begin{aligned}
\vec{F} = \vec{F}^{O\to P} &= -k(\overrightarrow{OP} - l_0\widehat{OP}) \\
\vec{F} &= -k\,\left(\overrightarrow{OP_0} + \epsilon\,\overrightarrow{P_0Q} - l_0\,\hat{x}\right) \\
&= -k\,(l_0\,\hat{x} + \epsilon\,(l - l_0)\,\hat{x} - l_0\,\hat{x})
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\vec{F} = -k\,\epsilon\,(l - l_0)\,\hat{x}}
$$

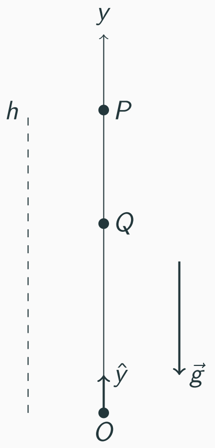
$$
\frac{\vec{dr}}{d\epsilon} = \frac{d\,\vec{OP}}{d\epsilon} = \overrightarrow{P_0Q} = (l - l_0)\,\hat{x}
$$

$$
\boxed{\vec{dr} = d\,\vec{r} = (l - l_0)\hat{x}\,d\epsilon}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= -\int_{\epsilon=0}^{\epsilon=1} \vec{F} \bullet \vec{dr} \\
&= \int_{\epsilon=0}^{\epsilon=1} k\,\epsilon\,(l - l_0)^2\,d\epsilon \\
&= \left[\frac{1}{2}\epsilon^2\right]_0^1 k(l - l_0)^2
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{V = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2}
$$

force de gravité et potentiel associé



$$\boxed{V = -\int_O^P m\vec{g} \bullet \vec{dr}}$$

paramétrisation du trajet de Q :

pour $\epsilon = 0$, le point $Q = O$

pour $\epsilon = 1$, le point $Q = P$

$$\boxed{\vec{OQ} = \epsilon\vec{OP}}$$

$$\|\vec{OP}\| = h$$

$$
\begin{aligned}
\vec{OP} &= h\,\hat{y} \\
\vec{r} &= \vec{OQ} = \epsilon\vec{OP} = \epsilon\, h\,\hat{y} \\
\frac{d\,\vec{r}}{d\epsilon} &= h\,\hat{y} \\
\vec{dr} &= d\,\vec{r} = h\hat{y}\,d\epsilon \\
\vec{g} &= -g\,\hat{y} \\
m\vec{g}\bullet\vec{dr} &= -mgh\,d\epsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V &= -\int_O^P m\vec{g}\bullet\vec{dr} \\
&= -\int_{\epsilon=0}^{1}(-mgh)\,d\epsilon \\
&= -\left[-mgh\right]_0^1
\end{aligned}
$$

$$\boxed{V = m\,g\,h}$$

gradient et potentiel

Un repère cartésien $(O, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ est donné

Définition
Soit $\vec{\nabla}$ l'opérateur différentiel suivant (qui prend une fonction scalaire comme argument et produit un vecteur):

$$\vec{\nabla} := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

critère pour le potentiel

$$\text{si } \forall C \quad \oint_C \vec{F} \bullet \vec{dr} = 0 \text{ alors il existe } V(x_1, x_2, x_3)$$

tel que

$$\vec{F} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} \\ \\ \frac{\partial V}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial V}{\partial x_3} \end{pmatrix}_{(O, \hat{x_1}, \hat{x_2}, \hat{x_3})}$$

Le symbole $\frac{\partial V}{\partial x_1}$ signifie la dérivée partielle de V par rapport à x_1, ce qui signifie que la dérivée est prise par rapport à x_1 en considérant les autres variables x_2 et x_3 comme des constantes.

gradient et potentiel

Soit un potentiel $V(\vec{r})$ donné

théorème (force issue du potentiel)

La force

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

satisfait

$$\oint_C \vec{F} \cdot \vec{dr} = 0 \qquad \forall C \text{dans un ensemble simplement connexe}$$

gradient et potentiel

$$\vec{dr} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z} \qquad\qquad \vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}$$

démonstration

$$\begin{aligned}
\oint_C \vec{F}\cdot\vec{dr} &= \int_1^2 \vec{F}\cdot\vec{dr} + \int_2^1 \vec{F}\cdot\vec{dr} \\
&= \int_1^2 -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz \\
&\quad + \int_2^1 -\frac{\partial V}{\partial x}dx - \frac{\partial V}{\partial y}dy - \frac{\partial V}{\partial z}dz \\
&= -\int_1^2 dV - \int_2^1 dV \\
&= -(V_2 - V_1) - (V_1 - V_2) = 0
\end{aligned}$$

gradient et potentiel

Soit

$$\vec{F} \triangleq F_1\hat{x}_1 + F_2\hat{x}_2 + F_3\hat{x}_3$$

théorème

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \qquad \forall i \neq j$$

gradient et potentiel

démonstration $\Rightarrow$

$$\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} F_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial V}{\partial x_i} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i} F_j = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$$

démonstration $\Leftarrow$

cf. cours d'Analyse

Ceci signifie que si on donne les trois fonctions F_1, F_2, et F_3, on peut vérifier avec ce critère si la force $\vec{F} = \sum_{i=1}^{3} F_i \hat{x}_i$ est conservative (elle découle alors d'un potentiel).

Exemple 1
Soit $F_1 = 2x_1x_2x_3$, $F_2 = x_1^2 + x_2^2$ et $F_3 = x_3^2$. Comme

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 2x_2x_3 \neq \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 2x_1$$

la force $\vec{F} = 2x_1x_2x_3\hat{x}_1 + (x_1^2 + x_2^2)\hat{x}_2 + x_3^2\hat{x}_3$ est non conservative.

Exemple 2
Soit $F_1 = 6x_1x_2$, $F_2 = 3x_1^2 + x_3^2 \cos x_2$ et $F_3 = 2x_3 \sin x_2$. Comme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} = 6x_1 \quad &= \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 2 \times 3x_1 \\ \frac{\partial F_1}{\partial x_3} = 0 \quad &= \quad \frac{\partial F_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_2} = 2x_3 \cos x_2 \quad &= \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_3} = 2x_3 \cos x_2 \end{aligned}$$

la force provient d'un potentiel. La force est conservative. On peut montrer que le potentiel est $V = 3x_1^2x_2 + x_3^2 \sin x_2$.

énergie

énergie cinétique d'un point matériel

$$\boxed{T \triangleq \frac{1}{2} m \vec{v} \bullet \vec{v}}$$

changement d'énergie cinétique

- travail de $\vec{F}$ de $\vec{r}(t_1)$ à $\vec{r}(t_2)$ est équivalent au changement d'énergie cinétique

théorème de l'énergie cinétique

$$T_2 - T_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \bullet \vec{v} dt = W_{12}$$

démonstration du théorème de l'énergie cinétique

1. Loi 2 de Newton

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} \bullet \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\vec{a} \bullet \vec{v} dt$$

2. Leibniz (à l'envers) en remarquant que $\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \frac{d\vec{v}}{dt}$

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} m\vec{a} \bullet \vec{v}\, dt &= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} dt = \int_{t_1}^{t_2} m\frac{1}{2}\left(\frac{d\vec{v}}{dt} \bullet \vec{v} + \vec{v} \bullet \frac{d\vec{v}}{dt}\right) dt \\
&= \int_{t_1}^{t_2} m\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\vec{v} \bullet \vec{v}) dt \\
&= \left(\frac{1}{2} m\vec{v} \bullet \vec{v}\right)\Big|_{t_1}^{t_2} \\
&= T_2 - T_1
\end{aligned}$$

unités [mksa]

Unités [mksa]

- longueur, [mètre], [m]
- temps, [seconde], [s]
- vitesse, [m/s]
- accélération, [m/s^2]
- masse, [kilogramme], [kg]
- force, [Newton], [N] $= \left[\frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}\right]$
- travail, énergie, [Joule], [J] $= \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}\right]$
- puissance, [Watt], [W] $= \left[\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}\right]$

conservation de l'énergie pour un point matériel avec potentiel

conservation de l'énergie

théorème de la conservation de l'énergie

si la force est conservative, la grandeur

$$E = T + V$$

est une constante du mouvement.

conservation de l'énergie (1ère méthode)

V est connu et produit la force

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial x}\,\hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\,\hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{z}$$

montrons que l'énergie est constante en dérivant celle-ci par rapport au temps

$$\begin{aligned}
E &= V + T = V + \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \\
\dot{E} &= \frac{d}{dt}V + \frac{d}{dt}T \\
&= \frac{d}{dt}V + m\dot{x}\,\ddot{x} + m\dot{y}\,\ddot{y} + m\dot{z}\,\ddot{z} \\
&= \frac{d}{dt}V + \dot{x}F_x + \dot{y}F_y + \dot{z}F_z \\
&= \frac{d}{dt}V - \dot{x}\frac{\partial V}{\partial x} - \dot{y}\frac{\partial V}{\partial y} - \dot{z}\frac{\partial V}{\partial z} \\
&= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} - \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} - \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \\
&= 0
\end{aligned}$$

remarque sur une étape du calcul infinitésimal...

l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \frac{\partial V}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\dot{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\dot{z} \\ &= \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z}\frac{dz}{dt} \end{aligned}$$

devient plus claire en considérant chaque symbole d, ∂ comme une petite variation Δ

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \left.\frac{\Delta V}{\Delta x}\right|_{\text{selon x}} \frac{\Delta x}{\Delta t} + \left.\frac{\Delta V}{\Delta y}\right|_{\text{selon y}} \frac{\Delta y}{\Delta t} + \left.\frac{\Delta V}{\Delta z}\right|_{\text{selon z}} \frac{\Delta z}{\Delta t}$$

et en simplifiant les Δ avec les mêmes variables

$$\Delta V = \left.\Delta V\right|_{\text{selon x}} + \left.\Delta V\right|_{\text{selon y}} + \left.\Delta V\right|_{\text{selon z}}$$

conservation de l'énergie (2 ème méthode)

démonstration

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_1^2 \vec{F} \bullet \vec{dr} = \\ &= \int_1^{r_s} \vec{F} \bullet \vec{dr} + \int_{r_s}^2 \vec{F} \bullet \vec{dr} \\ &= V_1 - V_2 \end{aligned}$$

... en appliquant le théorème de l'énergie cinétique ...

$$W_{12} = T_2 - T_1$$

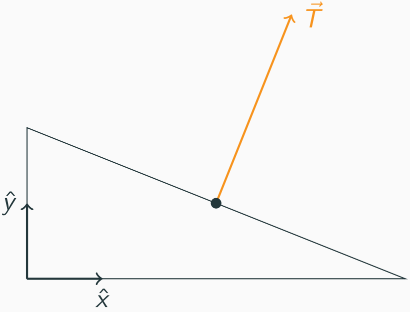
$$\begin{aligned} W_{12} = T_2 - T_1 &= V_1 - V_2 = W_{12} \\ T_2 + V_2 &= T_1 + V_1 \\ E_2 &= E_1 \end{aligned}$$

force de liason parfaite

force de liaison parfaite

Une force de laison parfaite est une force qui ne produit pas de travail sur un déplacement infinitésimal (dit virtuel, ceci sera expliqué en détail dans le chapitre sur Lagrange). Pour l'instant, et pour les force que nous avons rencontrées comme la tension du fil dans le pendule et la liaison du plan incliné il suffit d'envisager un petit déplacement du point d'application de la force compatible avec la contrainte.

$$\boxed{dW = T \bullet d\vec{r} = 0}$$

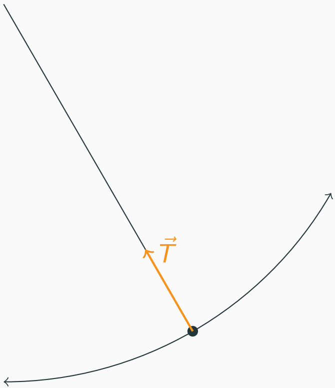


liaison: $y = -\frac{2}{5}x$

$$\begin{aligned} dy &= -\frac{2}{5}dx \\ d\vec{r} &= dx\hat{x} + dy\hat{y} \\ &= dx\hat{x} - \frac{2}{5}dx\hat{y} \\ \vec{T} &= T_x\hat{x} + T_y\hat{y} \\ \vec{T} \bullet d\vec{r} &= T_x dx - \frac{2}{5}T_y dx = 0 \\ T_x &= \frac{2}{5}T_y \end{aligned}$$

la force de liaison est ainsi perpendiculaire au plan !

liaison parfaite du pendule simple



liaison: $l^2 = x^2 + y^2$

$$
\begin{aligned}
0 &= 2xdx + 2ydy \\
d\vec{r} &= dx\hat{x} - \frac{x}{y}dx\hat{y} \\
\vec{T} &= T_x\hat{x} + T_y\hat{y} \\
\vec{T} \bullet d\vec{r} &= T_x dx - \frac{x}{y}T_y dx = 0 \\
T_x y &= T_y x
\end{aligned}
$$

la force de liaison est ainsi toujours alignée avec le fil !

stabilité

définition

Un point $\vec{r}$ tel que

$$\vec{v} = \vec{0}$$
$$\vec{a} = \vec{0}$$

si la force est issue d'un potentiel...

$$-\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{F} = m\vec{a} = \vec{0}$$

critère de stabilité (locale) basé sur l'énergie

Soit $E = T + V$, l'énergie mécanique du système. Le système est localement stable s'il existe $\epsilon > 0$ de telle sorte que les conditions suivantes soient satisfaites:

1. V est minimum à l'équilibre. Soit $\bar{\vec{r}}$ le point d'équilibre. On a

$$V(\vec{r}) > V(\bar{\vec{r}}) \qquad \forall \vec{r} \neq \bar{\vec{r}}, \|\vec{r} - \bar{\vec{r}}\| < \epsilon$$

2. $\dot{E} \leq 0$

esquisse de la démonstration

On ajoute une constante à l'énergie afin que l'énergie soit nulle au point d'équilibre. Sous l'hypothèse que V est minimum à l'équilibre, l'énergie est une forme définie positive $E > E_{min} = 0$ quel que soit la position et la vitesse loin de l'équilibre. $E = E_{min} = 0$ à l'équilibre. Les courbes de niveau de l'énergie finissent toujours par être des courbes de niveau fermées lorsqu'on se rapproche de l'équilibre. Ainsi, quelle que soit la boule (aussi petite que désirée) dans l'espace des positions et vitesses, on peut toujours trouver un ensemble délimité par une courbe de niveau contenu à l'intérieur du voisinage initial. Le système mécanique est piégé dans cet ensemble et ne peut le quitter. Le système est stable.

énergie du système masse-ressort

énergie cinétique T et potentielle élastique V

$$E = T + V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

stabilité du système masse-ressort

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

… on applique le critère…

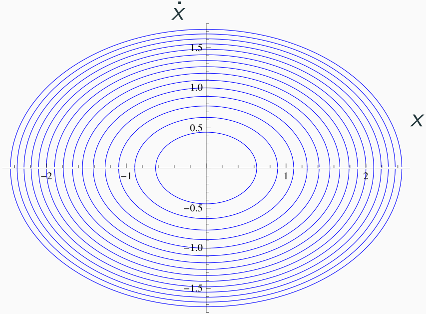
1. $V = \frac{1}{2}kx^2$ est minimum à l'équilibre $\bar{x} = 0$
2. $$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \dot{E} &= m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} \\ &= m\dot{x}\left(-\frac{k}{m}x\right) + kx\dot{x} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Le point d'équilibre $\bar{x} = 0$ est donc stable

les courbes d'énergie constante

$$\dot{x} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)}$$

…. sont les trajectoires du système



énergie du pendule simple

Energie cinétique T **et énergie potentielle gravifique** V

$$E = T + V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\phi}^2 + mgl(1 - \cos\phi)$$

stabilité du pendule simple

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l}\sin\phi$$

... on applique le critère...

1.
$$V = mgl(1-\cos\phi)$$
est minimum à l'équilibre $\bar{\phi} = 0$

2.
$$E = T + V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\phi}^2 + mgl(1-\cos\phi)$$

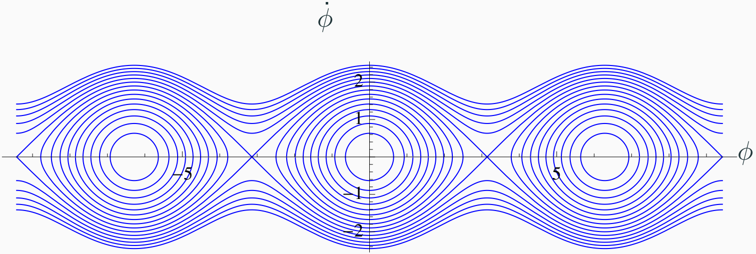
$$\begin{aligned}\dot{E} &= ml^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + mgl\dot{\phi}\sin\phi \\ &= ml^2\dot{\phi}\left(-\frac{g}{l}\sin\phi\right) + mgl\dot{\phi}\sin\phi \\ &= 0\end{aligned}$$

$\bar{\phi} = 0$ est un point d'équilibre stable

Les courbes d'énergie constante

$$\dot{\phi} = \pm\sqrt{\frac{2}{ml^2}\left(E - mgl(1+\cos\phi)\right)}$$

.... sont les trajectoires du système



Système conservateur à un degré de liberté

équilibres

Les points d'équilibre s'obtiennent en cherchant les extremums du potentiel (maximum, minimum, ou point selle). Il faut que la dérivée par rapport à la coordonnée, notée ϕ, s'annule:

$$\boxed{\frac{dV}{d\phi} = 0}$$

Toute valeur $\phi = \bar{\phi}$ pour laquelle cette expression est vraie sera un point d'équilibre.

stabilité

L'équilibre sera stable si le point d'équilibre est à un minimum de potentiel. En analyse, V atteint un minimum lorsque $\frac{dV}{d\phi} = 0$ et lorsque

$$\boxed{\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi=\bar{\phi}} \geq 0}$$