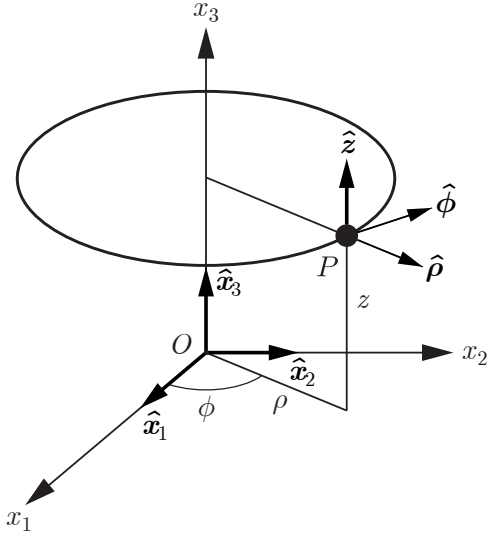


Point matériel

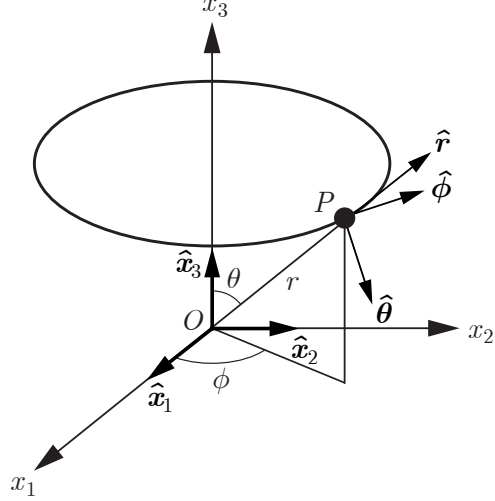
Coordonnées cylindriques :



$$\hat{\rho} = e_\rho \quad \hat{\phi} = e_\phi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \rho \mathbf{e}_\rho + z \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{v} &= \dot{\rho} \mathbf{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + \dot{z} \hat{\mathbf{z}} \\ \mathbf{a} &= (\ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_\rho + (\rho \ddot{\phi} + 2\dot{\rho} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi \\ &\quad + \ddot{z} \hat{\mathbf{z}} \end{aligned}$$

Coordonnées sphériques :



$$\hat{\mathbf{r}} = e_r \quad \hat{\boldsymbol{\theta}} = e_\theta \quad \hat{\boldsymbol{\phi}} = e_\phi$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= r \mathbf{e}_r \\ \mathbf{v} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta + r \dot{\phi} \sin \theta \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\phi}^2 \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r \\ &\quad + (r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta \\ &\quad + (r \ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \theta + 2r \dot{\theta} \dot{\phi} \cos \theta) \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Mouvement relatif, changement de référentiel :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a(P) &= \mathbf{v}_a(A) + \mathbf{v}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP} \\ \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{OP} &= \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{OO}' + \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} \mathbf{O}'P + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'P \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_a(P) &= \mathbf{a}_a(A) + \mathbf{a}_r(P) + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AP}) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{v}_r(P) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{AP} \\ \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{OP} &= \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}} \mathbf{OO}' + \frac{d^2}{dt^2} \Big|_{\mathcal{R}'} \mathbf{O}'P + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{O}'O) + 2\boldsymbol{\Omega} \wedge \frac{d}{dt} \Big|_{\mathcal{R}'} \mathbf{O}'P + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{O}'P \end{aligned}$$

Formules de Poisson :

$$\dot{\hat{\mathbf{u}}} = \boldsymbol{\Omega} \wedge \hat{\mathbf{u}} \quad \text{où} \quad \hat{\mathbf{u}} \text{ est un vecteur unitaire quelconque}$$

Solide indéformable

Cinématique :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_Q &= \mathbf{V}_P + \boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{PQ} \\ \mathbf{A}_Q &= \mathbf{A}_P + \boldsymbol{\Omega} \wedge (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{PQ}) + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \wedge \mathbf{PQ} \end{aligned}$$

Théorèmes de transfert du moment de force :

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{M}_A + \mathbf{BA} \wedge \mathbf{R}$$

Théorème de transfert du moment cinétique :

$$\mathbf{L}_B = \mathbf{L}_A + \mathbf{BA} \wedge M\mathbf{v}_G$$

Théorème du moment cinétique :

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_O, \quad \sum \mathbf{M}_G^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_G, \quad \sum \mathbf{M}_C^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_C, \quad \sum \mathbf{M}_P^{\text{ext}} = \dot{\mathbf{L}}_P + \mathbf{V}_P \wedge M\mathbf{V}_G$$

Moment cinétique et moments d'inertie :

Si diagonal :

$$\mathbf{L}_G = I_G \boldsymbol{\Omega} = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{\mathbf{e}}_i = I_{G,1} \Omega_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad \text{où} \quad I_{G,i} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,i}^2$$

Si non diagonal :

$$\mathbf{L}_G = \left[\sum m_{\alpha} \begin{pmatrix} y_i^2 + z_i^2 & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -x_i y_i & x_i^2 + z_i^2 & -y_i z_i \\ -x_i z_i & -y_i z_i & x_i^2 + y_i^2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix}$$

Point A quelconque :

$$\mathbf{L}_A = I_A \boldsymbol{\omega} + \mathbf{AG} \wedge M\mathbf{V}_A$$

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I_{A,i} = I_{G,i} + M d^2 \quad \mathbf{I}_A = \mathbf{I}_G + M (\mathbf{AG}) (\mathbf{AG})^T = \mathbf{I}_G + M \begin{pmatrix} \gamma_y^2 + \gamma_z^2 & -\gamma_x \gamma_y & -\gamma_x \gamma_z \\ -\gamma_x \gamma_y & \gamma_x^2 + \gamma_z^2 & -\gamma_y \gamma_z \\ -\gamma_x \gamma_z & -\gamma_y \gamma_z & \gamma_x^2 + \gamma_y^2 \end{pmatrix}$$

avec $\mathbf{AG} = \gamma_x \hat{x}''' + \gamma_y \hat{y}''' + \gamma_z \hat{z}'''$ exprimé dans le repère lié au solide.

Quantité de mouvement et énergie cinétique :

$$\mathbf{p} = M \mathbf{V}_G, \quad T = \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G^2 + \frac{1}{2} (I_{G,1} \Omega_1^2 + I_{G,2} \Omega_2^2 + I_{G,3} \Omega_3^2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= M \mathbf{V}_G \\ T &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}_G \bullet \mathbf{V}_G + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \bullet \mathbf{I}_G \boldsymbol{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} M \mathbf{V}_A \bullet \mathbf{V}_A + M \mathbf{V}_A \bullet (\boldsymbol{\Omega} \wedge \mathbf{AG}) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \bullet \mathbf{I}_A \boldsymbol{\Omega} \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\Omega} \bullet \mathbf{I}_O \boldsymbol{\Omega} \end{aligned}$$

Théorème de l'énergie cinétique :

$$\Delta T_{1 \rightarrow 2} = \sum_{\alpha} W_{1 \rightarrow 2} (\mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}}) = \sum_{\alpha} \int_{C_{1 \rightarrow 2}} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\alpha}$$

Inerties des corps simples :

Parallélépipède : Largeur en x : a , profondeur en y : b , et hauteur en z : c

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \frac{1}{12} m (b^2 + c^2) \\ I_{yy} &= \frac{1}{12} m (a^2 + c^2) \\ I_{zz} &= \frac{1}{12} m (a^2 + b^2) \end{aligned}$$

Cylindre : rayon R et longueur L

$$\begin{aligned} I_{\parallel} &= \frac{1}{2} m R^2 \\ I_{\perp} &= \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2 \end{aligned}$$

Sphère creuse :

$$I = \frac{2}{3} m R^2$$

Boule pleine :

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

Cône plein (axes fixés au sommet, hauteur h , rayon de la base R) :

$$z_G = \frac{3h}{4}$$

$$I_{\parallel} = \frac{3}{10} m R^2$$

$$I_{\perp} = \frac{3}{5} m \left(\frac{R^2}{4} + h^2 \right)$$

Cône creux (axes fixés au sommet, hauteur h , rayon de la base R) :

$$z_G = \frac{2h}{3}$$

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_{\perp} = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{2} m h^2$$

Tige mince de longueur L , axes sur le centre de masse au milieu de la tige

$$\frac{1}{12} m L^2$$

Eléments de volume :

- en coordonnées cartésiennes : $dm = \mu dx dy dz$
- en coordonnées cylindriques : $dm = \mu \rho d\rho d\phi dz$
- en coordonnées sphériques : $dm = \mu r^2 \sin \theta d\phi dr d\theta$

Rotations

Matrice de rotation, le point tourne, le repère reste fixe

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Matrice de rotation, le repère tourne, le point reste fixe

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

Formule générale d'une matrice de rotation (le point tourne, le repère reste fixe), angle θ et axe \hat{n} :

$$R(\theta) = \cos \theta I + (1 - \cos \theta) \hat{n} \hat{n}^T + \sin \theta [\hat{n} \wedge]$$

avec

$$[\hat{n} \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix}$$

cas particuliers (point tourne, repère fixe) :

$\hat{n} = (1 \ 0 \ 0)^T$	$\hat{n} = (0 \ 1 \ 0)^T$	$\hat{n} = (0 \ 0 \ 1)^T$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Angles d'Euler : 3 - 1 - 3

Première rotation d'angle ψ d'axe x_3
précession

Deuxième rotation d'angle θ et d'axe x'_1
nutation

$$\begin{aligned} \mathbf{GP} &= x_1 \hat{x}_1 + x_2 \hat{x}_2 + x_3 \hat{x}_3 \\ &= x'_1 \hat{x}'_1 + x'_2 \hat{x}'_2 + x'_3 \hat{x}'_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{GP} &= x'_1 \hat{x}'_1 + x'_2 \hat{x}'_2 + x'_3 \hat{x}'_3 \\ &= x''_1 \hat{x}''_1 + x''_2 \hat{x}''_2 + x''_3 \hat{x}''_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix}$$

Troisième rotation d'angle ϕ et d'axe x''_3
rotation propre

$$\begin{aligned} \mathbf{GP} &= x''_1 \hat{x}''_1 + x''_2 \hat{x}''_2 + x''_3 \hat{x}''_3 \\ &= x'''_1 \hat{x}'''_1 + x'''_2 \hat{x}'''_2 + x'''_3 \hat{x}'''_3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x'''_1 \\ x'''_2 \\ x'''_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{pmatrix}$$

ω en fonction des vitesses angulaires de angles d'Euler :

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi + \dot{\theta} \cos \phi \\ \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi \\ \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

Equations d'Euler :

$$\begin{aligned}I_1 \dot{\omega}_1 &= (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 + M_{G,1}^{\text{ext}} \\I_2 \dot{\omega}_2 &= (I_3 - I_1) \omega_1 \omega_3 + M_{G,2}^{\text{ext}} \\I_3 \dot{\omega}_3 &= (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 + M_{G,3}^{\text{ext}}\end{aligned}$$

Oscillations

Oscillateur masse ressort avec amortissement :

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$$

Pulsation à vide (absence de frottement $b = 0$)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Facteur d'amortissement :

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

Pulsation de la solution homogène :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Solution homogène :

1. $\gamma > \omega_0$:

$$x_h = C_1 e^{-(\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{-(\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}$$

2. $\gamma = \omega_0$:

$$x_h = (C_1 + C_2 t) e^{-\gamma t}$$

3. $\gamma < \omega_0$:

$$x_h = e^{-\gamma t} \left(A \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t) + B \sin(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t) \right)$$

Oscillateur forcé (amorti et forcé) :

$$\ddot{x} + \frac{b}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = A \sin(\omega t)$$

Solution particulière :

$$x_p = \frac{A}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2} \left((\omega_0^2 - \omega^2) \sin(\omega t) - 2\gamma \omega \cos(\omega t) \right)$$

Résonance :

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{2m^2}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Battelements :

$$\begin{aligned}x(t) &= B(A \sin(\omega_1 t) + \sin(\omega_2 t)) \\ &= B(1 - A) \sin\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) + B(1 + A) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right)\end{aligned}$$

Forces centrales, frottements

Forces centrales :

loi des aires :

$$C = r^2 \dot{\theta} = \text{constante}$$

Binet :

$$a_r = -\frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

Conique paramétrique :

$$\frac{p}{r} = (1 + e \cos \theta)$$

avec $p \triangleq d$. Pour le cercle $e = 0$, $d = +\infty$ et $p = r$ l'équation paramétrique dégénère. Pour tous les autres cas, ellipse, parabole et hyperbole, Binet et l'équation paramétrique peuvent être utilisées.

Gravitation :

$$\chi = GM = C^2 \frac{a}{b^2}$$

a et b sont les paramètres cartésiens de l'ellipse (demi grand axe a , demi petit axe b).

Loi de Kepler (conséquence de la loi des aires, demi grand axe a , demi petit axe b) :

$$C = \frac{2S}{T} = \frac{2\pi ab}{T}$$

Troisième loi de Kepler (demi grand axe a , période T) :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Electrostatique et force centrale :

$$\chi = \frac{qQ}{m} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

Accélération radiale (ellipse, hyperbole, parabole) :

$$a_r = \pm \chi \frac{1}{r^2}$$

$$p = \frac{C^2}{|\chi|}$$

Potentiel de gravitation :

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

Potentiel effectif :

$$V_{\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - GmM\frac{1}{r}$$

- $V_{\text{eff}} > 0 \Rightarrow$ hyperbole
- $V_{\text{eff}} = 0 \Rightarrow$ parabole
- $0 > V_{\text{eff}} > -\frac{G^2mM^2}{2C^2} \Rightarrow$ ellipse.

Cercle : $r = \frac{C^2}{GM}$

Frottements :

Frottement visqueux (basse vitesse) :

$$\mathbf{F}_{\text{fr}} = -k\eta \hat{v}$$

Frottement visqueux (haute vitesse) :

$$\mathbf{F}_{\text{fr}} = -C_x \eta \frac{1}{2} S \|v\|^2 \hat{v}$$

Frottement statique sec :

$$\|\mathbf{F}_{\text{fr}}\| \leq \mu_c \|\mathbf{N}\|$$

Frottement sec cinétique :

$$\mathbf{F}_{\text{fr}} = -\mu_c \|\mathbf{N}\| \hat{v}$$

Lagrange

Lagrangien :

$$\mathcal{L} = T - V$$

Conservateur :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1, \dots, n$$

Non conservateur :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = F_{q_i} \quad i = 1, \dots, n$$

Coordonnées cyclique q :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \text{constante}$$

Travail et force généralisée

$$\delta W = \sum_{i=1}^n F_{q_i} \delta q_i$$

Puissance

$$\begin{aligned} P_{\text{inst}} &= \mathbf{F} \bullet \mathbf{v} && \text{point matériel} \\ P_{\text{inst}} &= \mathbf{M} \bullet \boldsymbol{\omega} && \text{solide avec un moment de force} \end{aligned}$$

Puissance instantanée et force généralisée

$$P_{\text{inst}} = \frac{\delta W}{\delta t} = \sum_{i=1}^n F_{q_i} \frac{\delta q}{\delta t} = \sum_{i=1}^n F_{q_i} \dot{q}_i$$

Puissance et énergie

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}(\tau) \bullet \mathbf{v}(\tau) d\tau \qquad P = \frac{dW}{dt}$$

Trigonométrie

$$\begin{aligned} \cos^2 \theta + \sin^2 \theta &= 1 && \cos a \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) + \cos(a+b)] \\ \theta &= \frac{s}{R} && \sin a \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a-b) - \cos(a+b)] \\ \sin(a \pm b) &= \sin a \cos b \pm \sin b \cos a && \sin a \cos b = \frac{1}{2} [\sin(a+b) + \sin(a-b)] \\ \cos(a \pm b) &= \cos a \cos b \mp \sin a \sin b && \sin^2 \theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2} \qquad \cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} \\ \tan(a \pm b) &= \frac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b} \end{aligned}$$

Produits

Produit mixte :

$$\mathbf{a} \bullet (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Produit triple :

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \bullet \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \bullet \mathbf{b}) \mathbf{c}$$

Potentiers

Gravifique terrestre (labo) : $V = mgh$

Ressort linéaire : $V = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$

Ressort spiral : $V = \frac{1}{2}k_\theta(\theta - \theta_0)^2$

Gravifique planète (potentiel de gravitation) : $V = -\frac{GMm}{r}$