

Exercice en classe

L'oscillateur forcé de torsion examiné en classe

Enoncé

On observe une pulsation à vide ω_0 en absence de frottement.

On ajoute alors un frottement (en jouant avec le bouton qui crée des courants de Foucault proportionnels à la vitesse angulaire et donc un moment de force proportionnel à la vitesse angulaire). Le frottement est tel qu'il divise par 10 l'amplitude après une période d'oscillation. Prendre comme première approximation que la période avec amortissement est identique à celle sans amortissement pour calculer la valeur de l'amortissement γ .

On demande de déterminer le rapport d'amplitude à la résonance.

Solution :

L'amplitude décroît selon l'exponentielle $e^{-\gamma t}$ avec γ une valeur numérique ajustable par le bouton de l'expérience. Ce bouton est ajusté, selon l'énoncé, de telle sorte qu'en supposant que l'amplitude soit de 1

$$0.1 = e^{-\gamma T}$$

avec T la durée d'une période. En prenant le logarithme

$$\ln(0.1) = -2.3 = -\gamma T = -\gamma \frac{2\pi}{\omega_0}$$

ce qui permet de déterminer

$$\gamma = 2.3/(2\pi)\omega_0 = 0.366 \cdot \omega_0$$

En reprenant le déterminant du cours

$$(\omega_0 - \omega)^2 + 4\gamma^2\omega^2$$

que l'on peut remettre sous la forme

$$\omega^4 + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2)\omega^2 + \omega_0^4$$

En introduisant $\nu = \omega^2$ et en annulant la dérivée on détermine ν_r la valeur de ν qui fait que le système est à la résonance.

$$2\nu_r + (4\gamma^2 - 2\omega_0^2) = 0$$

ce qui donne la pulsation de résonance une fois posé $\omega_r = \sqrt{\nu_r}$

$$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

En introduisant la valeur de γ obtenue précédemment

$$\omega_r = \sqrt{1 - 2(0.366)^2} \omega_0 = 0.8556 \omega_0$$

En ce qui concerne le rapport d'amplitude demandé il s'agit de

$$\frac{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}}{A}$$

Il faut calculer α_0 et α_1 en posant par exemple $A = 1$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_r^2} (\omega_0^2 - \omega_r^2) A \\ &= \frac{1}{(0.27)^2 + 4(0.366)^2 (0.8556)^2} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^4} 0.27 \\ &= \frac{1}{0.0729 + 0.3917} 0.27 \frac{1}{\omega_0^2} \\ &= 0.58 \frac{1}{\omega_0^2} \\ \alpha_1 &= -\frac{\omega_r}{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\gamma^2 \omega_r^2} 2\gamma A \\ &= -\frac{0.8556}{(0.27)^2 + 4(0.366)^2 (0.8556)^2} 2 \cdot 0.366 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^4} \\ &= -1.346 \frac{1}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

Comme on a choisit $A = 1$ le rapport d'amplitude est

$$\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2} \approx \sqrt{(0.58)^2 + (1.346)^2} \frac{1}{\omega_0^2} \approx 1.47 \frac{1}{\omega_0^2}$$

L'équation différentielle du cours

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A \sin(\omega t)$$

est valable lorsqu'on force l'accélération. Dans l'expérience on bouge la position du ressort et vous allez voir dans les exercices que l'équation différentielle forcée devient alors

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = A\omega_0^2 \sin(\omega t)$$

On peut donc multiplier par ω_0^2 le facteur obtenu par le calcul théorique.

Avec l'expérience, on confirme qu'une fois sur la résonance avec le frottement qui diminue l'oscillation d'un facteur de 10, on constate que l'oscillation de la marque blanche est 1.5 x plus importante que l'oscillation de la marque noire. La marque noire est l'extrémité forcée de l'oscillateur spiral et la marque blanche est l'autre extrémité connectée au disque. Il y a amplification du mouvement.

Une façon plus élégante aurait été de remplacer directement ω_r par sa valeur algébrique $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{A}{\sqrt{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}} &= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_r^2)^2 + 4\gamma^2\omega_r^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\gamma^2))^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{(2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{4\gamma^2\omega_0^2 - 4\gamma^4}} \\
&= \frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} \\
&\approx \frac{1}{2 \cdot 0.366 \cdot \sqrt{1 - (0.366)^2}} \frac{1}{\omega_0^2} \\
&\approx 1.47 \frac{1}{\omega_0^2}
\end{aligned}$$