

Complément : Barre et Anneau

Enoncé : Une barre fine et infiniment rigide, dont toute la masse est concentrée au centre de masse, supporte un anneau pouvant glisser librement le long de celle-ci. La barre a une extrémité fixée sur un plan horizontal autour duquel la barre peut tourner. La gravité n'agit ainsi pas sur la barre (on prendra une gravité nulle pour simplifier le bilan des forces). Le système possède ainsi deux degrés de liberté, l'angle ϕ de la barre ainsi que la position r de l'anneau, distance entre l'anneau et le centre de rotation.

Méthode de Lagrange

Le système peut être assimilé à deux points matériels avec deux contraintes parfaites. Soit les coordonnées cartésiennes x_P et y_P pour la position de l'anneau de masse m et x_G et y_G pour la position du centre de la barre, ainsi assimilée à un point matériel de masse M . La barre est de longueur $2L$. On a deux contraintes parfaites entre les coordonnées cartésiennes :

$$0 = x_G^2 + y_G^2 - L^2 \quad (1)$$

$$0 = x_G y_P - y_G x_P \quad (2)$$

La première contrainte (1) signifie que le centre de masse G de la barre décrit un cercle de rayon L et la seconde contrainte (2) indique que l'anneau est toujours sur la barre (cette contrainte cesse d'être respectée une fois l'anneau expulsé). Nous avons ainsi $N = 4$ coordonnées cartésiennes et $C = 2$ contraintes ce qui conduit à $n = N - C = 2$ degrés de liberté. En introduisant les coordonnées généralisées r et ϕ nous avons

$$x_P = r \cos \phi$$

$$y_P = r \sin \phi$$

$$x_G = L \cos \phi$$

$$y_G = L \sin \phi$$

et les deux contraintes sont bien respectées avec ce choix de coordonnées généralisées :

$$0 = L^2 \cos^2 \phi + L^2 \sin^2 \phi - L^2$$

$$0 = L \cos \phi r \sin \phi - L \sin \phi r \cos \phi$$

Energie cinétique :

Comme nous avons deux points matériels, l'énergie est la somme de celle des deux points matériels. Chacune s'exprime directement à partir des coordonnées cartésiennes.

$$T = \frac{1}{2} m \dot{x}_P^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}_P^2 + \frac{1}{2} M \dot{x}_G^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}_G^2 \quad (3)$$

On calcule alors les dérivées des coordonnées cartésiennes en fonction des coordonnées généralisées et de leurs premières dérivées :

$$\begin{aligned}\dot{x}_P &= \dot{r} \cos \phi - r \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y}_P &= \dot{r} \sin \phi + r \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{x}_G &= -L \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y}_G &= L \dot{\phi} \cos \phi\end{aligned}$$

On introduit ces expressions dans l'énergie cinétique :

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\dot{\phi} \cos \phi \sin \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \right) \\ &+ \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 \sin^2 \phi + 2r\dot{r}\dot{\phi} \sin \phi \cos \phi + r^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi \right) \\ &+ \frac{1}{2}ML^2 \dot{\phi}^2 \sin^2 \phi \\ &+ \frac{1}{2}ML^2 \dot{\phi}^2 \cos^2 \phi \\ &= \frac{1}{2}m \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 \right) + \frac{1}{2}ML^2 \dot{\phi}^2\end{aligned}$$

où on a utilisé l'identité trigonométrique $\sin^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ et la simplification des termes croisés.

Equations de Lagrange Le lagrangien L comporte que de l'énergie cinétique (pas de potentiel)

$$\mathcal{L} = T$$

On a deux équations, chacune associée à une coordonnée généralisée :

Selon r :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{\partial T}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = 0 \quad (4)$$

Selon ϕ :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} + ML^2 \dot{\phi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 2mr\dot{r}\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi} + ML^2\ddot{\phi}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$$

ϕ est une coordonnée dite 'cyclique' car ϕ n'apparaît pas dans l'expression du Lagrangien L .

Equation de Lagrange associée :

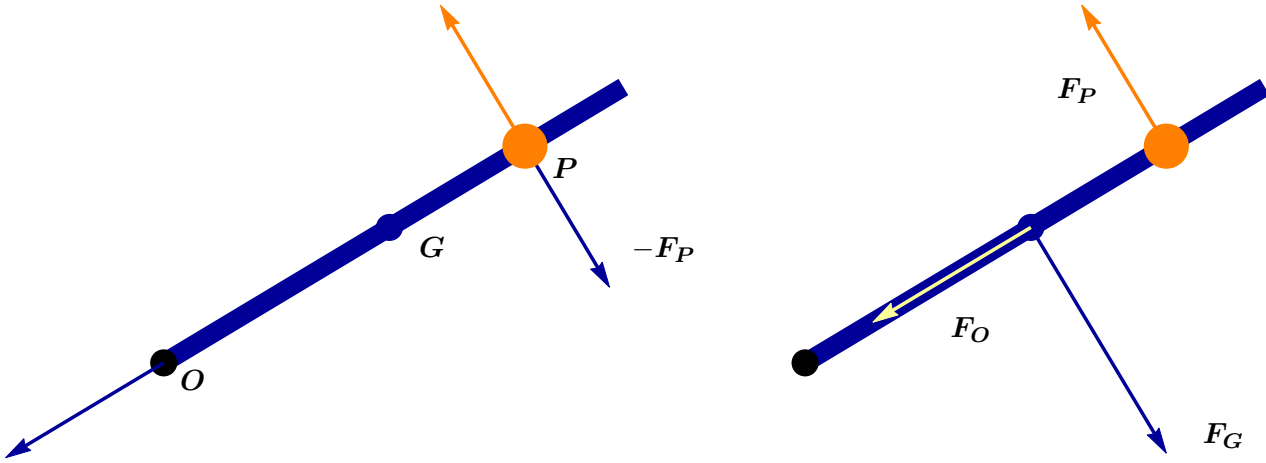


FIGURE 1 – Illustration de l'équivalence entre le système de forces de liaison (contrainte parfaite). A gauche les forces aux points d'application de celle-ci par action réaction. A droite ces forces sont rapportées au centre de masse de la barre et de l'anneau.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} &= \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} \right) &= 2mr\dot{\phi} + mr^2\ddot{\phi} + ML^2\ddot{\phi} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

En résolvant (4) et (5) pour \ddot{r} et $\ddot{\phi}$, on obtient

$$\ddot{r} = r\dot{\phi}^2 \quad (6)$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2mr\dot{\phi}}{ML^2 + mr^2} \quad (7)$$

Méthode de Newton

Il y a deux équations de Newton. Une pour chaque point matériel.

$$\begin{aligned} M\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{G} &= \mathbf{R}_G = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_O \\ m\ddot{\mathbf{O}}\mathbf{P} &= \mathbf{R}_P = \mathbf{F}_P \end{aligned}$$

On a

- \mathbf{R}_G : la résultante des forces agissant sur la barre au centre de masse.
- \mathbf{R}_P : la résultante des forces agissant sur l'anneau.
- \mathbf{F}_G : la force équivalente à la réaction de l'anneau sur la barre (rapportée au centre de masse).
- \mathbf{F}_O : la réaction de l'attache sur la barre appliquée au centre de rotation. REMARQUE : Comme cette force ne crée aucun moment de force autour de O, c'est également la force rapportée au point G (au centre de masse de la barre).

L'équivalence entre le systèmes de forces avec action réaction et les forces est représenté à la figure 1. Utilisons les coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}\mathbf{OP} &= r \mathbf{e}_r \\ \mathbf{OG} &= L \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

les vitesses s'expriment alors comme

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{OP}} &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \omega \wedge \mathbf{e}_r \\ &= \dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi \\ \dot{\mathbf{OG}} &= L \dot{\mathbf{e}}_r \\ &= L \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

et l'expression des accélérations devient

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{OP}} &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + r \ddot{\mathbf{e}}_r + \dot{r} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \dot{\phi} \dot{\mathbf{e}}_\phi \\ &= \ddot{r} \mathbf{e}_r + 2\dot{r} \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi + r \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - r \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r \\ &= (\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + (r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi \\ \ddot{\mathbf{OG}} &= L \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi + L \dot{\phi} \dot{\mathbf{e}}_\phi \\ &= L \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - L \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r\end{aligned}$$

Expression des forces en utilisant les coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_O &= F_O \mathbf{e}_r \\ \mathbf{F}_G &= F_G \mathbf{e}_\phi \\ \mathbf{F}_P &= F_P \mathbf{e}_\phi\end{aligned}$$

REMARQUE : Le principe d'action-réaction indique que la force appliquée de la barre sur l'anneau $F_P \mathbf{e}_\phi$ induit une force de réaction que la barre encaisse $-F_P \mathbf{e}_\phi$ et appliquée au point de la barre coïncidant avec le point P de l'anneau. Ainsi, cette force ne s'applique pas nécessairement au centre de masse G (sauf dans le cas $r = L$). Ainsi lorsque $r \neq L$, il faut rapporter la force de réaction et la remplacer par une force équivalente qui est appliquée au centre de masse. A cette fin on utilise l'équivalence des moments de forces autour de O . En effet, la barre est rigide et on peut donc soit considérer la loi de Newton de rotation

$$I_O \ddot{\phi} = M_O = -F_P r$$

avec $I_O = ML^2$, soit demeurer en coordonnées cylindriques et tenir compte de la relation d'équivalence entre la force au point P et la force au point G équivalente au sens de générer le même moment de force autour du point O :

$$-F_P r \mathbf{e}_\phi = F_G L \mathbf{e}_\phi \tag{8}$$

Ainsi les équations de Newton deviennent

$$m \ddot{\mathbf{OP}} = m(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + m(r \ddot{\phi} + 2\dot{r} \dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi = F_P \mathbf{e}_\phi \tag{9}$$

$$M \ddot{\mathbf{OG}} = ML \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - ML \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_O = -F_P \frac{r}{L} \mathbf{e}_\phi + F_O \mathbf{e}_r \tag{10}$$

En décomposant selon \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_ϕ on obtient quatre équations pour quatre inconnues $F_O, F_P, \ddot{\phi}, \ddot{r}$:

$$\begin{aligned} m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= 0 \\ m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) &= F_P \\ ML\ddot{\phi} &= -F_P \frac{r}{L} \\ -ML\dot{\phi}^2 &= F_O \end{aligned}$$

et en résolvant on trouve en reportant F_P de la deuxième équation dans la troisième

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\phi}^2 \\ ML\ddot{\phi} &= (-mr\ddot{\phi} - 2m\dot{r}\dot{\phi}) \frac{r}{L} \end{aligned}$$

ce qui donne les finalement les accélérations généralisées

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= r\dot{\phi}^2 \\ \ddot{\phi} &= -\frac{2m r \dot{\phi}}{ML^2 + mr^2} \end{aligned} \quad (11)$$

et en reportant

$$\begin{aligned} F_P &= \frac{2m\dot{r}\dot{\phi} M L^2}{ML^2 + mr^2} \\ F_O &= -ML\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

On pourrait également utilisé la loi de Newton de rotation et on aurait avec la deuxième équation de l'anneau

$$\begin{aligned} ML^2\ddot{\phi} &= -F_P r \\ m(r\ddot{\phi} + 2r\dot{\phi}) &= F_P \end{aligned}$$

ce qui conduit à la même expression (11) pour $\ddot{\phi}$ une fois F_P éliminé de ces deux équations.

Méthode de d'Alembert (coordonnées cartésiennes)

Ecrivons les équations dynamiques en coordonnées cartésiennes. On ne prend aucune précaution pour diriger les forces de contraintes dans le bon sens. La méthode donnera celui-ci de manière automatique pour chacune des forces. Nous savons qu'il y a les deux contraintes (1) et (2) entre les quatre coordonnées cartésiennes x_P, y_P, x_G et y_G . Pour respecter ces contraintes il faut des forces. Ainsi les lois de Newton s'écrivent

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_P &= F_{xP} \\ m\ddot{y}_P &= F_{yP} \\ M\ddot{x}_G &= F_{xG} \\ M\ddot{y}_G &= F_{yG} \end{aligned}$$

avec F_{xP}, F_{yP}, F_{xG} et F_{yG} les composantes scalaires des forces de contraintes. Ces forces de liaison proviennent de contraintes dites parfaites. Elles obéissent ainsi au principe de d'Alembert qui stipule que le travail des forces de liaison lors d'un déplacement infinitésimal compatible avec les contrainte (lorsque les coordonnées sont des coordonnées généralisées minimales alors le déplacement infinitésimal

est arbitraire car les liaisons sont automatiquement satisfaites). Le long des coordonnées cartésiennes x_P, y_P, x_G et y_G ils sont notés respectivement $\delta x_P, \delta y_P, \delta x_G$ et δy_G . Le principe de d'Alembert s'énonce ainsi :

$$F_{xP} \delta x_P + F_{yP} \delta y_P + F_{xG} \delta x_G + F_{yG} \delta y_G = 0 \quad (12)$$

avec comme accroissements virtuels (obtenus par différentiation de $x_P = r \cos \phi, y_P = r \sin \phi, x_G = L \cos \phi$ et $y_G = L \sin \phi$) :

$$\begin{aligned} \delta x_P &= \cos \phi \delta r - r \sin \phi \delta \phi \\ \delta y_P &= \sin \phi \delta r + r \cos \phi \delta \phi \\ \delta x_G &= -L \sin \phi \delta \phi \\ \delta y_G &= L \cos \phi \delta \phi \end{aligned}$$

En exprimant les forces de liaison à partir des accélérations et en introduisant dans le principe (12)

$$m\ddot{x}_P \delta x_P + m\ddot{y}_P \delta y_P + M\ddot{x}_G \delta x_G + M\ddot{y}_G \delta y_G = 0 \quad (13)$$

on remplace alors les accélérations par

$$\begin{aligned} \ddot{x}_P &= \ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{y}_P &= \ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \\ \ddot{x}_G &= -L \ddot{\phi} \sin \phi - L \dot{\phi}^2 \cos \phi \\ \ddot{y}_G &= L \ddot{\phi} \sin \phi - L \dot{\phi}^2 \sin \phi \end{aligned}$$

En introduisant ceci dans (13) on a

$$\begin{aligned} 0 &= m \left(\ddot{r} \cos \phi - 2\dot{r} \dot{\phi} \sin \phi - r \ddot{\phi} \sin \phi - r \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) (\cos \phi \delta r - r \sin \phi \delta \phi) \\ &+ m \left(\ddot{r} \sin \phi + 2\dot{r} \dot{\phi} \cos \phi + r \ddot{\phi} \cos \phi - r \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) (\sin \phi \delta r + r \cos \phi \delta \phi) \\ &+ M \left(-L \ddot{\phi} \sin \phi - L \dot{\phi}^2 \cos \phi \right) (-L \sin \phi \delta \phi) \\ &+ M \left(L \ddot{\phi} \sin \phi - L \dot{\phi}^2 \sin \phi \right) (L \cos \phi \delta \phi) \end{aligned}$$

ce qui donne en développant et simplifiant

$$\begin{aligned} 0 &= m \left(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2 \right) \delta r + m \left(r^2 \ddot{\phi} + 2r \dot{r} \dot{\phi} \right) \delta \phi + ML^2 \ddot{\phi} \delta \phi \\ &= \left(m\ddot{r} + mr \dot{\phi}^2 \right) \delta r + \left((ML^2 + mr^2) \ddot{\phi} + 2m r \dot{r} \dot{\phi} \right) \delta \phi \end{aligned} \quad (14)$$

et comme les variations δr et $\delta \phi$ peuvent et doivent être arbitraires dans (14), cela implique que l'on a simultanément

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr \dot{\phi}^2 &= 0 \\ (ML^2 + mr^2) \ddot{\phi} + 2m r \dot{r} \dot{\phi} &= 0 \end{aligned}$$

et on retrouve les équations dynamiques précédemment obtenues (6) et (7).

Méthode de d'Alembert (coordonnées polaires)

C'est la méthode la plus expéditive. Elle ne nécessite pas d'hypothèse sur l'orientation des forces de liaison. On place deux forces pour la barre et deux pour l'anneau toutes deux en coordonnées polaires et on applique le principe de d'Alembert. Les équations dynamiques découlent alors presque automatiquement.

On part des équations des équations de Newton mais sans structure des forces de liaison :

$$m \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{P} = m(\ddot{r} - r \dot{\phi}^2) \mathbf{e}_r + m(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi}) \mathbf{e}_\phi = F_{a,\phi} \mathbf{e}_\phi + F_{a,r} \mathbf{e}_r \quad (15)$$

$$M \ddot{\mathbf{O}}\mathbf{G} = ML \ddot{\phi} \mathbf{e}_\phi - ML \dot{\phi}^2 \mathbf{e}_r = F_{b,\phi} \mathbf{e}_\phi + F_{b,r} \mathbf{e}_r \quad (16)$$

Ce sont quasiment les mêmes équations que (9) et (10) sauf que les forces sont laissées arbitraires pour l'instant. Le travail infinitésimal des forces de liaison s'exprime sous la forme

$$\delta W = F_{a,\phi} r_1 \delta\phi_1 + F_{a,r} \delta r_1 + F_{b,\phi} L \delta\phi_2 + F_{b,r} \delta r_2$$

REMARQUE : Les déplacements infinitésimaux en distance sont δr_1 et δr_2 pour les forces selon \mathbf{e}_r . Le point P se déplace sur un arc de longueur $r_1 \delta\phi_1$ de telle sorte que le travail infinitésimal associé est $F_{a,\phi} r_1 \delta\phi_1$. De manière similaire, le centre de masse G se déplace sur un arc de longueur $L \delta\phi_2$ de telle sorte que le travail infinitésimal est $F_{b,\phi} L \delta\phi_2$.

Le principe des travaux virtuels de d'Alembert dit que lorsque le déplacement virtuel satisfait la liaison alors $\delta W = 0$. Les liaisons sont telles que $\phi_1 = \phi_2$ et donc $\delta\phi_1 = \delta\phi_2 = \delta\phi$. Comme G reste fixe radialement $\delta r_2 = 0$. Par contre, P se déplace librement radialement et on peut alors poser $\delta r_1 = \delta r$.

Le principe s'exprime alors sous la forme

$$0 = (F_{a,\phi} r + F_{b,\phi} L) \delta\phi + F_{a,r} \delta r$$

En remplaçant les forces de liaison par leur expression données par (15) et (16), on obtient les équations

$$0 = [(2m\dot{r}\dot{\phi} + mr\ddot{\phi}) r + (ML\ddot{\phi}) L] \delta\phi + [m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)] \delta r$$

Et comme les déplacements $\delta\phi$ et δr sont libres et arbitraires, on a simultanément les deux équations différentielles

$$\begin{aligned} (2m\dot{r}\dot{\phi} + mr\ddot{\phi}) r + (ML\ddot{\phi}) L &= 0 \\ m(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) &= 0 \end{aligned}$$

et après réarrangement

$$\begin{aligned} (mr^2 + ML^2) \ddot{\phi} + 2m r \dot{r} \dot{\phi} &= 0 \\ \ddot{r} - r\dot{\phi}^2 &= 0 \end{aligned}$$

On retrouve les équations différentielles (6) et (7).