
Corrigé Série 11 : Systèmes de points matériels, collisions

Exercices d'introduction

A Questions conceptuelles

1. Au moment du passage au-dessus de la barre, la position du corps de l'athlète est telle que son centre de masse peut être en dehors du volume de son corps (notamment si le corps est courbé comme un demi-cercle). Il est donc possible que son centre de masse soit au niveau ou même en dessous de la barre. On remarquera que si la barre est remplacée par un mur, alors le centre de masse pourrait passer "à travers" le mur.

Durant le saut, et en négligeant les frottements de l'air, le poids est la seule force extérieure. La trajectoire du centre de masse suit un mouvement balistique, qui est donc une parabole. Les vidéos suivantes illustrent la situation :

<https://www.youtube.com/watch?v=XBtBdNHBNSI>

<https://www.youtube.com/watch?v=RaGUW1d0w8g>

2. Non, la quantité de mouvement de la balle n'est pas conservée car le sol applique une force extérieure au système de la balle. On note que les quantités de mouvement avant et après le choc, bien qu'ayant des normes égales, ne sont pas des vecteurs égaux.

C'est seulement si on considère le système balle+Terre que la quantité de mouvement totale est conservée : lorsque la balle change de direction, la Terre subit donc un effet de recul (imperceptible à cause de sa grande masse), de sorte que le centre de masse du système balle+Terre est immobile (si on néglige toute autre force externe durant la collision).

3. Dans les deux cas (sol ou matelas), l'œuf subit la même variation de quantité de mouvement Δp durant le choc (en fait $\Delta p = m\sqrt{2gh}$ où m est la masse de l'œuf et h la hauteur de chute). Cette variation de quantité de mouvement est égale à l'impulsion de la force $F(t)$ appliquée par le sol ou le matelas durant un temps Δt . Par la deuxième loi de Newton, l'impulsion est égale à

$$\Delta p = \int_0^{\Delta t} F(t) dt,$$

où on a mis $t = 0$ à l'instant où la force commence à agir.

En supposant que la force F est constante durant le choc, c'est-à-dire $F(t) = F_0$, on a $\Delta p = F_0 \Delta t$ et la force est inversement proportionnelle à la durée du choc ($F_0 = \frac{\Delta p}{\Delta t}$). Comme la durée du choc sur le matelas est beaucoup plus longue que sur le sol, la force moyenne y est plus faible, et donc l'œuf se cassera moins facilement sur le matelas.

B Firmin le peintre

Le système formé de la nacelle et de Firmin étant à l'équilibre statique, la somme des forces et la somme des moments des forces (par rapport à n'importe quel point du référentiel) doivent toutes deux être nulles. Dans les trois situations décrites dans l'énoncé, toutes les forces qui s'appliquent sur le système sont verticales : il s'agit du poids de la nacelle $m\vec{g}$ et du poids de Firmin $M\vec{g}$, dirigés vers le bas, et des deux forces de soutien des câbles \vec{F}_{gauche} et \vec{F}_{droite} , dirigées vers le haut et mesurées par les dynamomètres. Comme on doit avoir $M\vec{g} + m\vec{g} + \vec{F}_{\text{gauche}} + \vec{F}_{\text{droite}} = 0$, la force du dynamomètre de droite vaut toujours $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}}$.

Lorsque Firmin est situé au centre de la nacelle, les forces exercées par les câbles sont égales par symétrie. Le dynamomètre du côté droit doit alors indiquer, comme à gauche, $F_{\text{droite}} = F_{\text{gauche}} = 600$ N. On peut également s'en convaincre en posant que la somme des moments des forces par rapport à un point au milieu de la nacelle vaut zéro. A ce stade on sait alors que la somme des poids vaut $Mg + mg = F_{\text{gauche}} + F_{\text{droite}} = 600 + 600 = 1200$ N.

Lorsque le dynamomètre de gauche indique 400 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 400 = 800$ N.

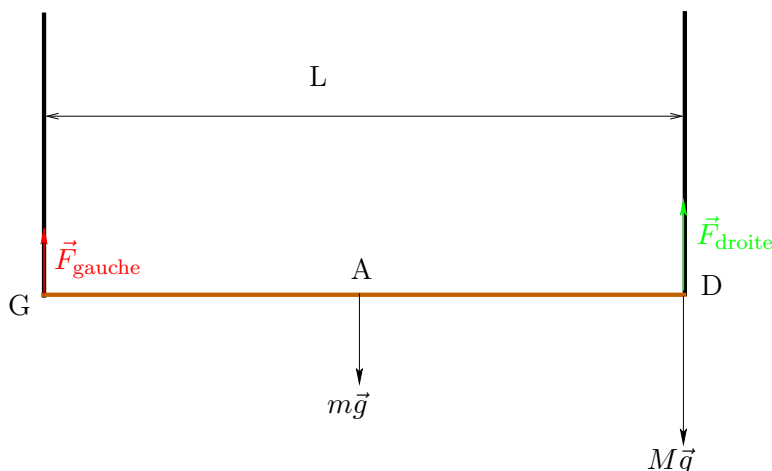
Lorsque le dynamomètre de gauche indique 200 N, celui de droite doit indiquer $F_{\text{droite}} = Mg + mg - F_{\text{gauche}} = 1200 - 200 = 1000$ N.

Posons maintenant que la somme des moments des forces par rapport au point d'attache du câble de droite sur la nacelle est nulle (voir figure) :

$$\Sigma \vec{M}_D = \vec{0} = \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge \vec{F}_{\text{droite}}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{DD} \wedge M\vec{g}}_0 + \underbrace{\overrightarrow{DA} \wedge m\vec{g}}_{mgL/2} + \underbrace{\overrightarrow{DG} \wedge \vec{F}_{\text{gauche}}}_{-F_{\text{gauche}}L},$$

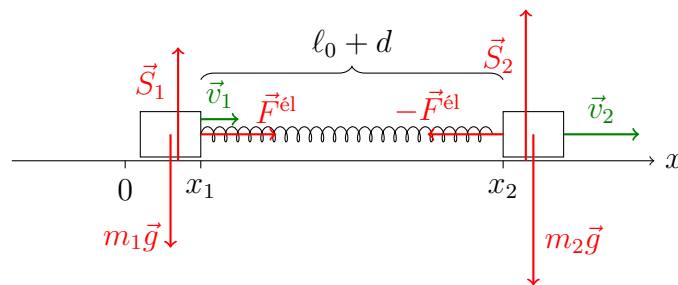
étant donné que les forces $M\vec{g}$ et \vec{F}_{droite} n'ont pas de moment par rapport à ce point. On a donc $mg = 2F_{\text{gauche}}$.

Finalement, le poids de l'échafaudage vaut ainsi $mg = 400$ N et celui de Firmin $Mg = 1200 - 400 = 800$ N.



C Problème à deux corps

1. Chacun des chariots subit son poids, le soutien du sol et la force élastique du ressort :



- (a) Le système formé des deux chariots subit le poids et le soutien du sol (les forces élastiques sont internes et se compensent). Les forces sont toutes verticales et s'annulent, étant donné qu'il n'y a aucun mouvement vertical. Le centre de masse a donc un mouvement horizontal, rectiligne et uniforme.
- (b) A cause du ressort, la distance entre les chariots oscille.
- (c) Le mouvement de chaque chariot est alors une superposition (addition) d'un mouvement rectiligne uniforme et d'une oscillation.
2. Comme il n'y a pas de mouvement vertical, écrivons les équations du mouvement selon \hat{e}_x uniquement.

La distance entre les chariots et la déformation d du ressort sont liées par

$$x_2 - x_1 = \ell_0 + d.$$

Si $d > 0$, le ressort est en élongation : le chariot 1 accélère vers la droite et le chariot 2 vers la gauche. Selon \hat{e}_x , l'accélération du chariot 1 est positive et celle du chariot 2 négative.

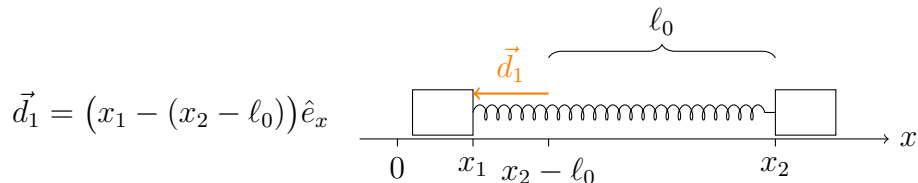
Si $d < 0$, le ressort est en compression. Selon \hat{e}_x , l'accélération du chariot 1 est alors négative et celle du chariot 2 positive.

On peut alors écrire les équations du mouvement et vérifier qu'on retrouve la force attendue :

- (a) Chariot 1 :

$$m_1 \ddot{x}_1 = -k(x_1 - (x_2 - \ell_0)) \quad x_1(0) = 0 \quad \dot{x}_1 = 0.$$

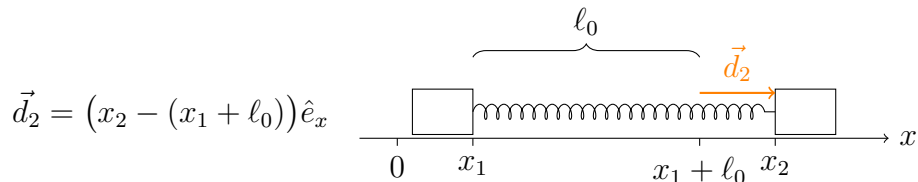
où le vecteur allongement \vec{d}_1 est donné par



Chariot 2 :

$$m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - (x_1 + \ell_0)) \quad x_2(0) = \ell_0 \quad \dot{x}_2 = v_0.$$

où le vecteur allongement \vec{d}_2 est donné par



Ainsi, selon \hat{e}_x ,

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= -kd_1 = -k(x_1 - (x_2 - \ell_0)) = +k(x_2 - x_1 - \ell_0) \\ m_2 \ddot{x}_2 &= -kd_2 = -k(x_2 - (x_1 + \ell_0)) = -k(x_2 - x_1 - \ell_0). \end{aligned}$$

(b) Centre de masse donné par $m x_G = m_1 x_1 + m_2 x_2$ où $m = m_1 + m_2$:

$$m \ddot{x}_G = m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0 \quad x_G(0) = \frac{m_2}{m} \ell_0 \quad \dot{x}_G(0) = \frac{m_2}{m} v_0.$$

(c) Coordonnée relative $\delta = x_2 - x_1$:

$$\ddot{\delta} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 = -\frac{k}{m_2}(\delta - \ell_0) - \frac{k}{m_1}(\delta - \ell_0) = -k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} (\delta - \ell_0).$$

En posant $\Omega^2 = k \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}$,

$$\ddot{\delta} = -\Omega^2 (\delta - \ell_0) \quad \delta(0) = \ell_0 \quad \dot{\delta}(0) = v_0.$$

C'est l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique centré sur ℓ_0 .

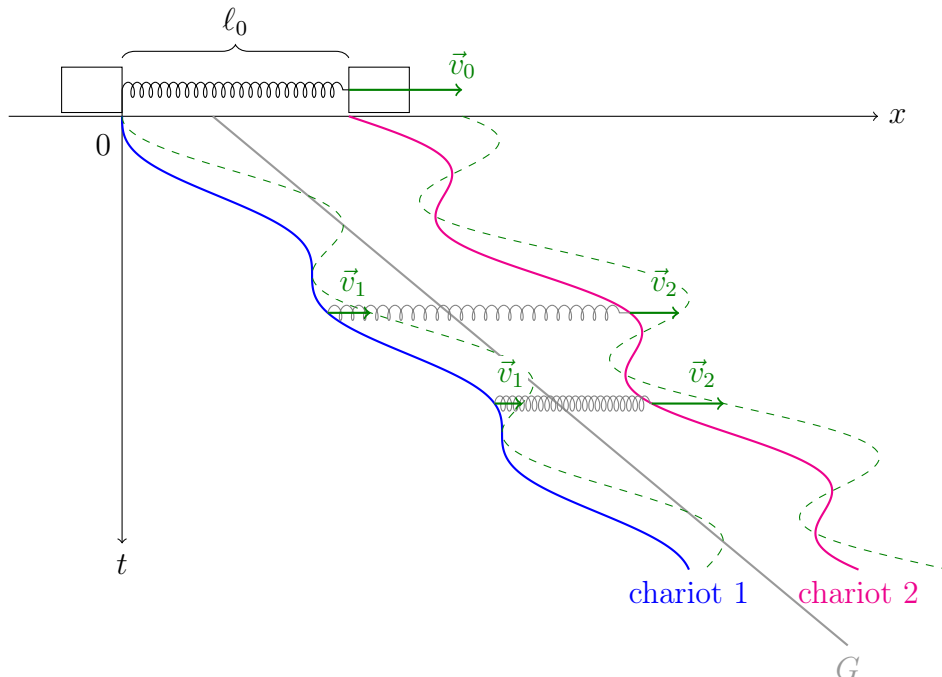
Illustration

On peut résoudre les équations du mouvement pour ces conditions initiales :

$$x_G(t) = \frac{m_2}{m} (v_0 t + \ell_0) \quad \delta(t) = \ell_0 + \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t).$$

On vérifie aisément que les positions des chariots sont données par

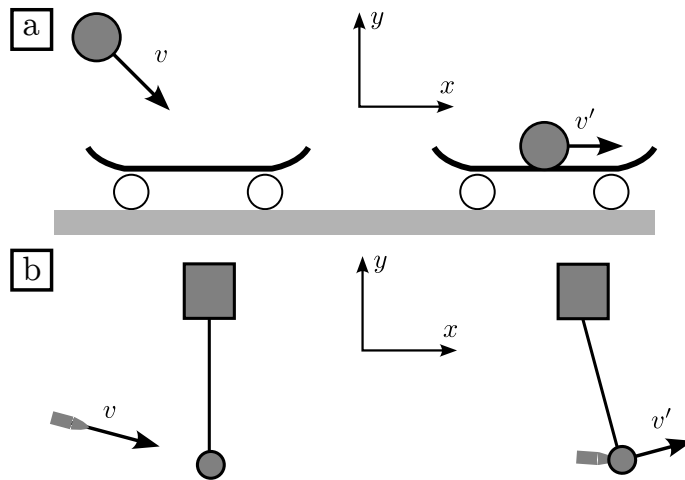
$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_G(t) - \frac{m_2}{m} \delta(t) = \frac{m_2}{m} (v_0 t - \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t)) \\ x_2(t) &= x_G(t) + \frac{m_1}{m} \delta(t) = \ell_0 + \frac{m_2}{m} v_0 t + \frac{m_1}{m} \frac{v_0}{\Omega} \sin(\Omega t). \end{aligned}$$



D Collisions avec contraintes

a) La quantité de mouvement initiale a la direction de la vitesse de la boule, \vec{v} , tandis que le mouvement du système "boule + planche" après la collision est purement horizontale. La quantité de mouvement n'est donc pas conservée, à cause de la force exercée par le sol sur la planche. Néanmoins, la quantité de mouvement selon \hat{x} est conservée car, en l'absence de frottement, aucune force extérieure n'est appliquée le long de la direction horizontale.

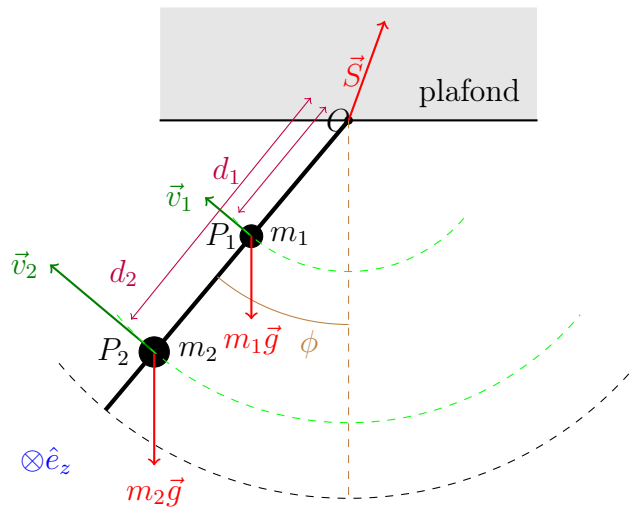
b) La longueur du fil ne change pas, donc, après la collision le système "balle + cible" suit une trajectoire circulaire. En conséquence, la vitesse du système juste après la collision est perpendiculaire au fil (soit horizontale). Comme au cas de la question a), la quantité de mouvement totale n'est pas conservée (il y a des forces de contrainte appliquées par le fil). De plus, la quantité de mouvement selon \hat{x} est conservée immédiatement après la collision, parce que le fil ne peut appliquer aucune force sur le système qui lui est perpendiculaire. De manière équivalente, le moment cinétique total par rapport au point d'appui de la corde est conservée, parce que toutes les forces extérieures sont radiales.



Problèmes

1 Pendule à deux masses

Le système considéré (“tige + masse m_1 + masse m_2 ”) est soumis à trois forces extérieures : les poids $m_1\vec{g}$ et $m_2\vec{g}$, ainsi qu’une force de soutien \vec{S} au niveau du point d’attache O , dont la direction est a priori inconnue (point fixe = 3 contraintes = 3 composantes inconnues de forces de liaison) :



Le moment de la force \vec{S} par rapport au point O est nul :

$$\vec{M}_O(\vec{S}) = \overrightarrow{OO} \wedge \vec{S} = \vec{0}.$$

Dans un repère cylindrique $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$, les moments dus aux poids s’écrivent quant à eux, toujours par rapport au point O ,

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(m_1\vec{g}) &= \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{g} = -m_1gd_1 \sin \phi \hat{e}_z \\ \vec{M}_O(m_2\vec{g}) &= \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{g} = -m_2gd_2 \sin \phi \hat{e}_z. \end{aligned}$$

Remarquons que la somme de ces deux moments est bien égale au moment du poids total du système “pendule” appliqué au centre de masse G :

$$\begin{aligned} \vec{M}_O((m_1 + m_2)\vec{g}) &= \overrightarrow{OG} \wedge (m_1 + m_2)\vec{g} \\ &= -\frac{d_1m_1 + d_2m_2}{m_1 + m_2} (m_1 + m_2)g \sin \phi \hat{e}_z \\ &= -(d_1m_1 + d_2m_2)g \sin \phi \hat{e}_z. \end{aligned}$$

D’autre part, le moment cinétique du pendule par rapport au point O a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \vec{L}_{O,m_1} + \vec{L}_{O,m_2} = \overrightarrow{OP_1} \wedge m_1\vec{v}_1 + \overrightarrow{OP_2} \wedge m_2\vec{v}_2 \\ &= d_1m_1v_1 \hat{e}_z + d_2m_2v_2 \hat{e}_z = d_1m_1d_1\dot{\phi} \hat{e}_z + d_2m_2d_2\dot{\phi} \hat{e}_z \\ &= (m_1d_1^2 + m_2d_2^2) \dot{\phi} \hat{e}_z. \end{aligned}$$

On applique alors le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$\Rightarrow (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2) \ddot{\phi} \hat{e}_z = -(m_1 d_1 + m_2 d_2) g \sin \phi \hat{e}_z .$$

$$\Rightarrow \ddot{\phi} + \omega_0^2 \sin \phi = 0 ,$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{(m_1 d_1 + m_2 d_2)}{(m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)} g .$$

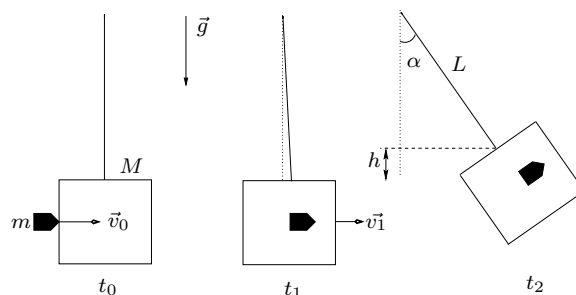
On reconnaît l'équation différentielle donnant l'évolution du pendule simple. Pour $\phi \ll 1$ le mouvement est harmonique de pulsation ω_0 .

Remarque : Le préfacteur devant g dans l'expression de ω_0 peut s'écrire

$$\frac{m_{\text{tot}} d_G}{I_O}$$

où d_G est la distance du centre de masse du système par rapport à O et I_O est le moment d'inertie du système par rapport à O , que nous introduirons prochainement en cours.

2 Pendule balistique



- a) Parmi toutes les forces qui s'appliquent sur le système formé de la balle et du bloc, seuls les poids de la balle et du bloc, ainsi que la tension T du fil sont des forces extérieures. En appliquant la deuxième loi de Newton (théorème du centre de masse) à ce système, on obtient

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T} \quad (1)$$

où \vec{p}_{tot} est la quantité de mouvement totale du système. Comme toutes les forces extérieures sont verticales, la somme de ces forces ne peut avoir une composante non nulle que dans la direction verticale. Comme le mouvement de la balle et du bloc sont supposés être tous deux horizontaux, le centre de masse du système n'a pas de mouvement vertical, et donc la somme des forces extérieures n'a pas de composante verticale. En fin de compte la somme des forces extérieures est nulle, ce qui implique que la quantité de mouvement totale du système est conservée (constante entre les instants t_0 et t_1) :

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = 0 \Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}}(t) = \text{constante} \Rightarrow \vec{p}_{\text{tot}}(t_1) = \vec{p}_{\text{tot}}(t_0). \quad (2)$$

Les seules forces qui travaillent entre t_0 et t_1 sont la force de frottement du bloc sur la balle, \vec{F} , et de la balle sur le bloc $\vec{F}' = -\vec{F}$. En effet toutes les autres forces sont verticales, c'est-à-dire perpendiculaires au mouvement de la balle et du bloc. La force \vec{F} est une force de frottement cinétique, qui n'est pas conservative. L'énergie mécanique du système n'est donc pas conservée.

Note : Puisque les forces \vec{F} et \vec{F}' sont opposées, on pourrait penser que leurs travaux devraient être opposés, donc que leur travail total devrait être nul et ainsi que le système soit conservatif. Ce raisonnement est incorrect. En effet, entre les temps t_0 et t_1 , la balle fait un plus grand déplacement que le bloc, la différence entre ces deux déplacements étant égale à la profondeur de pénétration de la balle dans le bloc. Par conséquent, la valeur absolue du travail de \vec{F} est supérieure à la valeur absolue du travail de \vec{F}' .

- b) La balle subit les forces suivantes entre les instants t_1 et t_2 :

- son poids $m\vec{g}$ vertical vers le bas ;
- une force \vec{R} exercée par le bloc sur la balle ;

Le bloc subit les forces suivantes entre les instants t_1 et t_2 :

- son poids $M\vec{g}$ vertical vers le bas ;
- une force \vec{T} exercée par le fil sur le bloc, dans la direction du point d'attache du fil ;
- une force $\vec{R}' = -\vec{R}$ (en vertu de la 3ème loi de Newton).

La résultante des forces extérieures $m\vec{g} + M\vec{g} + \vec{T}$ est non nulle (puisque les poids sont verticaux mais que la tension du fil ne l'est pas), et donc la quantité de mouvement totale du système n'est pas conservée.

Par contre, il n'y a plus de force de frottement et le système est devenu conservatif. Les seules forces qui travaillent sont les poids, et donc l'énergie mécanique totale du système est une constante du mouvement :

$$E_{\text{tot}}(t) = E_{\text{cin}}(t) + E_{\text{pot}}(t) = \text{constante} \Rightarrow E_{\text{tot}}(t_2) = E_{\text{tot}}(t_1). \quad (3)$$

Note : Cette fois la balle et le bloc ont le même déplacement (puisque la balle ne bouge plus par rapport au bloc), et donc les forces opposées \vec{R} et \vec{R}' ont des travaux opposés, c'est-à-dire un travail total nul.

- c) Au temps t_0 la balle a une vitesse \vec{v}_0 et le bloc a une vitesse nulle. Au temps t_1 , le bloc et la balle ont la même vitesse horizontale notée \vec{v}_1 . En utilisant la conservation de la quantité de mouvement totale entre t_0 et t_1 (équation (2)), on obtient :

$$m\vec{v}_1 + M\vec{v}_1 = m\vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \frac{m}{m+M}\vec{v}_0. \quad (4)$$

En utilisant la conservation de l'énergie entre t_1 et t_2 (équation (3)), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 - (m+M)gL &= \underbrace{\frac{1}{2}(m+M)v_2^2 - (m+M)gL \cos \alpha}_{=0} \\ \Rightarrow \frac{1}{2}(m+M)v_1^2 &= (m+M)gh, \end{aligned} \quad (5)$$

où

$$h = L - L \cos \alpha = L(1 - \cos \alpha) \quad (6)$$

est la hauteur de montée du système. En remplaçant \vec{v}_1 et h par leurs expressions (4) et (6) dans l'équation (5), pour combiner les trois équations il vient

$$gL(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{m+M} v_0 \right)^2 \Rightarrow v_0 = \left(1 + \frac{M}{m} \right) \sqrt{2gL(1 - \cos \alpha)}. \quad (7)$$

- d) On utilise le théorème de l'énergie cinétique qui dit que le travail des forces est égal à la variation d'énergie cinétique.

En appliquant ceci à la balle, entre les temps t_0 et t_1 , on obtient :

$$W^{\text{balle}} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m \left(\frac{m}{m+M}v_0 \right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (8)$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{m^2}{(m+M)^2} - 1 \right) = -\frac{1}{2} \frac{mM(2m+M)}{(m+M)^2} v_0^2 \quad (9)$$

$$= -\frac{M(2m+M)}{m} gL(1 - \cos \alpha). \quad (10)$$

Ce travail est négatif, car il est dû uniquement à la force de frottement du bloc sur la balle.

Pour le bloc, le théorème de l'énergie cinétique appliqué entre t_0 et t_1 donne

$$W^{\text{bloc}} = \frac{1}{2}Mv_1^2 - 0 = \frac{1}{2}M \left(\frac{m}{m+M}v_0 \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{m^2M}{(m+M)^2} v_0^2. \quad (11)$$

$$= MgL(1 - \cos \alpha). \quad (12)$$

Ce travail est celui de la force \vec{F}' . Il est positif.

Le travail total $W = W^{\text{balle}} + W^{\text{bloc}}$ est égal à

$$W = \frac{1}{2}(m + M)v_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m + M)\frac{m^2}{(m + M)^2}v_0^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (13)$$

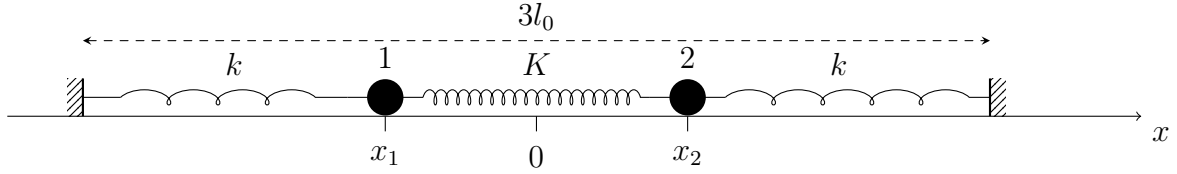
$$= \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{m}{m + M} - 1 \right) = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m + M}v_0^2. \quad (14)$$

$$= -\frac{M}{m}(m + M)gL(1 - \cos \alpha). \quad (15)$$

Ce travail total est négatif.

3 Oscillateurs couplés

On choisit un repère tel que l'axe x est parallèle au rail, et on place l'origine à mi-distance entre les points fixes des ressorts de constante de rappel k (tout autre choix fonctionne aussi).



Sans le ressort de raideur K , les 2 masses se comportent comme 2 oscillateurs harmoniques indépendants de pulsation $\sqrt{\frac{k}{m}}$. C'est le ressort de raideur K qui introduit le couplage entre les deux masses.

- a) La masse 1 subit la force du ressort à sa gauche (k) et du ressort centrale (K), au passe que la masse 2 subit la force du ressort centrale (K) et celle du ressort à sa droite (k). Pour calculer la force exercée par chaque ressort, il faut se rappeler que la magnitude d'une force de ressort est $|\vec{F}_k| = |l - l_0|$, où l est la longueur du ressort et l_0 sa longueur à vide, et que la force pointe dans la direction du ressort si $l > l_0$, et dans la direction opposée si $l < l_0$.

La longueur du ressort à la gauche est $x_1 - (-3l_0/2)$, celle du ressort centrale est $x_1 - x_2$ et celle du ressort à la droite est $3l_0/2 - x_1$. On peut, donc, calculer les forces totales appliqués sur chaque masse :

$$\vec{F}_1^{\text{tot.}} = -k(x_1 + 3l_0/2 - l_0)\hat{e}_x + K(x_2 - x_1 - l_0)\hat{e}_x = [-k(x_1 + l_0/2) + K(x_2 - x_1 - l_0)]\hat{e}_x \quad (16)$$

$$\vec{F}_2^{\text{tot.}} = -K(x_2 - x_1 - l_0) + k(3l_0/2 - x_2 - l_0)\hat{e}_x\hat{e}_x = [-K(x_2 - x_1 - l_0) + k(l_0/2 - x_2)]\hat{e}_x \quad (17)$$

- b) Les équations du mouvement pour les points matériels, numérotés 1 et 2, sont

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1 &= -k\left(x_1 - \left(-\frac{l_0}{2}\right)\right) - K(x_1 - (x_2 - l_0)) \\ \Rightarrow m\ddot{x}_1 &= -k\left(x_1 + \frac{l_0}{2}\right) + K(x_2 - x_1 - l_0), \end{aligned} \quad (18)$$

et

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 &= -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K(x_2 - (x_1 + l_0)) \\ \Rightarrow m\ddot{x}_2 &= -k\left(x_2 - \frac{l_0}{2}\right) - K(x_2 - x_1 - l_0). \end{aligned} \quad (19)$$

- c) Le centre de masse du système est défini par

$$X_G = \frac{mx_1 + mx_2}{m + m} = \frac{x_1 + x_2}{2} \Rightarrow \ddot{X}_G = \frac{\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2}{2},$$

et la coordonnée relative entre les points matériels est

$$u = x_2 - x_1 \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1.$$

En calculant la somme des équations (18) et (19), on obtient

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -k(x_1 + x_2) \Rightarrow m\ddot{X}_G = -kX_G \Rightarrow \ddot{X}_G + \frac{k}{m}X_G = 0, \quad (20)$$

qui est l'équation du mouvement du centre de masse.

En calculant la différence entre les équations (19) et (18), on obtient

$$m(\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) = -k(x_2 - x_1 - l_0) - 2K(x_2 - x_1 - l_0),$$

d'où l'on trouve

$$m\ddot{u} = -(k + 2K)(u - l_0) \Rightarrow \ddot{u} + \frac{k + 2K}{m}(u - l_0) = 0, \quad (21)$$

qui est l'équation du mouvement relatif.

- d) On remarque que les deux équations du mouvement (20) et (21) sont des équations d'oscillateurs harmoniques de pulsations $\omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pour le centre de masse, et $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$ pour le mouvement relatif.

La solution générale pour l'équation du mouvement du centre de masse est donc

$$X_G(t) = A_G \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_G \right),$$

et pour le mouvement relatif

$$u(t) = A_u \cos \left(\sqrt{\frac{k + 2K}{m}}t + \phi_u \right) + l_0.$$

Le mouvement des points matériels, $x_1(t)$ et $x_2(t)$, est alors donné par

$$x_1(t) = X_G - \frac{u}{2} = A_G \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_G \right) - \frac{1}{2}A_u \cos \left(\sqrt{\frac{k + 2K}{m}}t + \phi_u \right) - \frac{l_0}{2},$$

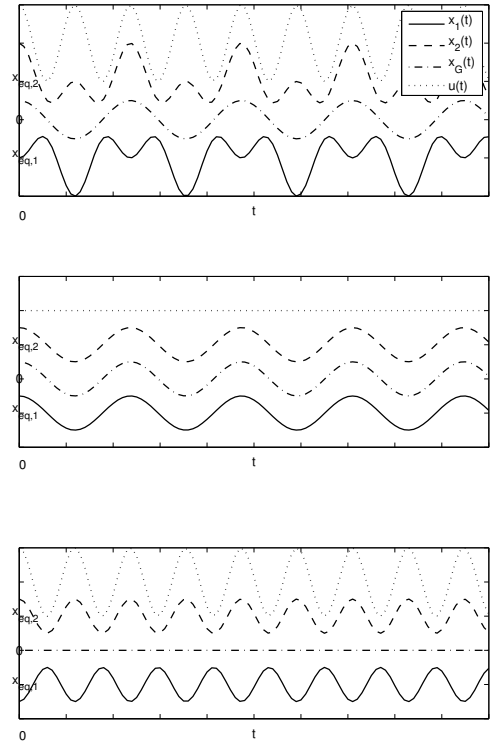
et

$$x_2(t) = X_G + \frac{u}{2} = A_G \cos \left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi_G \right) + \frac{1}{2}A_u \cos \left(\sqrt{\frac{k + 2K}{m}}t + \phi_u \right) + \frac{l_0}{2}.$$

e) Si la coordonnée relative reste constante, cela veut dire que la distance entre les 2 masses ne change pas au cours du temps. Cette situation correspond à une condition initiale telle que $A_u = 0$, et donc $u(t) = l_0$. Dans ce cas-là, les masses oscillent *en phase* avec une pulsation $\omega_G = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Cette situation est observée si les 2 masses sont écartées de leur position d'équilibre de la même distance et *dans la même direction* avant d'être lâchées.

Le cas particulier où le centre de masse est immobile correspond à une condition initiale telle que $A_G = 0$, et on a alors $X_G(t) = 0$. Dans ce cas-là, les deux masses oscillent *en opposition de phase* à la pulsation $\omega_u = \sqrt{\frac{k+2K}{m}}$. Ce mouvement est observé si les deux masses sont écartées de leur position d'équilibre d'une même distance et *dans des directions opposées* avant d'être lâchées.

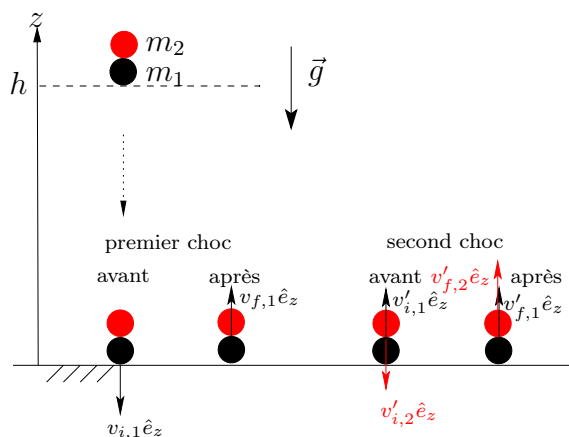
La figure ci-contre illustre l'évolution des différentes positions pour un cas général et les 2 cas particuliers.



Démonstration interactive d'oscillateurs couplés :

<https://austinpeel.github.io/coupled-oscillations/>

4 Rebond de deux balles



Attention : Dans cet exercice, la quantité v est la norme du vecteur \vec{v} alors que les quantités telles v_i , v_f sont des composantes selon l'axe z , dirigé vers le haut selon la figure. Nous considérons d'abord le cas où les deux chocs sont élastiques, puis nous traiterons le cas où le choc entre les deux balles est mou.

1.a) Comme indiqué dans la donnée, on décompose le problème en deux chocs élastiques. Le premier entre la balle m_1 et le sol suivi immédiatement après du deuxième entre les deux balles :

- avant le premier choc, la balle m_1 a une vitesse $v_i = -v$ (on a choisi l'axe \hat{e}_z dirigé vers le haut). Le choc est parfaitement élastique (et la masse de la balle négligeable par rapport à celle de la terre), donc $v_f = -v_i = v$ (v_i et v_f sont les vitesses initiale et finale de la balle en projection sur l'axe \hat{e}_z). La vitesse v est donnée par la hauteur h et l'accélération gravifique. Par conservation de l'énergie mécanique dans la chute, on a $\frac{1}{2}m_i v^2 = m_i g h$ ($i = 1, 2$), et donc

$$v = \sqrt{2gh}$$

- avant le deuxième choc, la balle m_1 a une vitesse $v'_{i,1} = v$ et la balle m_2 une vitesse $v'_{i,2} = -v$. La conservation de la quantité de mouvement permet d'écrire

$$m_1 v - m_2 v = m_1 v'_{f,1} + m_2 v'_{f,2} \quad (22)$$

et la conservation de l'énergie

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{f,1} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{f,2} \quad (23)$$

De l'équation (22), on tire

$$v'_{f,1} = \frac{(m_1 - m_2)v - m_2 v'_{f,2}}{m_1} \quad (24)$$

qu'on injecte dans (23) pour trouver

$$(m_2^2 + m_1 m_2)v'^2_{f,2} + 2(m_2^2 - m_1 m_2)v v'_{f,2} + (m_2^2 - 3m_1 m_2)v^2 = 0$$

Il s'agit d'une équation du deuxième degré dont les solutions sont

$$v'_{f,2} = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v \quad \text{et} \quad v'_{f,2} = -v$$

C'est la première solution qui nous intéresse (la deuxième correspond au cas où il n'y a pas eu de choc).

En injectant ce résultat dans (24), on trouve

$$v'_{f,1} = \frac{m_1 - 3m_2}{m_1 + m_2}v$$

1.b) Pour que les deux balles repartent vers le haut, il faut que $v'_{f,1} > 0$ et $v'_{f,2} > 0$. Ce qui donne respectivement les conditions

$$m_1 > 3m_2 \quad \text{et} \quad 3m_1 > m_2$$

Si la première condition est respectée, la deuxième l'est automatiquement. Si on veut que les balles repartent les deux vers le haut, il faut donc que $m_1 > 3m_2$. Dans le cas limite où $m_1 = 3m_2$, on a $v'_{f,1} = 0$, la balle m_1 reste immobile sur le sol.

1.c) Dans la limite où $m_1 \gg m_2$, on a

$$v'_{f,2} = 3v \quad \text{et} \quad v'_{f,1} = v \tag{25}$$

La hauteur à laquelle remontent les balles est donnée par l'équation du mouvement

$$\ddot{z} = -g \quad \Rightarrow \quad \dot{z} = -gt + v_0 \quad \Rightarrow \quad z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$$

avec les conditions initiales $z_0 = 0$ et v_0 est le résultat obtenu en (25)

La hauteur maximale est atteinte pour $\dot{z}(t_{\max}) = 0$, c'est-à-dire $t_{\max} = \frac{v_0}{g}$ et donc

$$z_{\max} = \frac{v_0^2}{2g}$$

Pour la balle m_1 , on a $v_0 = v$, donc

$$z_{1,\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$

Pour la balle m_2 , la vitesse initiale est $3v$, ce qui nous donne

$$z_{2,\max} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

Alternativement, on peut faire usage de la conservation de l'énergie mécanique. Par exemple, pour la balle de masse m_2 :

$$\frac{1}{2}m_2v'^2_{f,2} = \frac{1}{2}m_2(3v)^2 = m_2gz_{2,\max},$$

d'où on trouve immédiatement

$$z_{2,\max} = \frac{9v^2}{2g} = 9h.$$

On considère maintenant le cas où le choc entre les deux balles est mou. Les vitesses finales des deux balles sont donc égales, et nous les notons $v'_{f,1} = v'_{f,2} \equiv v'_f$.

2.a) Le raisonnement est similaire au cas des chocs élastiques, mais l'énergie mécanique n'est pas conservée au cours du choc mou. La conservation de la quantité de mouvement s'écrit maintenant

$$m_1v - m_2v = (m_1 + m_2)v'_f,$$

d'où l'on tire

$$v'_f = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\sqrt{2gh}$$

- 2.b) Pour que les balles partent vers le haut, il faut que la vitesse v'_f soit positive, et donc que $m_1 > m_2$.
Si $m_1 = m_2$, les balles restent au sol.
- 2.c) Si $m_1 \gg m_2$, la vitesse finale $v'_f = v$. Par la conservation de l'énergie mécanique pendant la phase de remontée, on trouve

$$\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2 = (m_1 + m_2)gz_{\max},$$

et donc

$$z_{\max} = \frac{v^2}{2g} = h.$$