

Corrigé Série 10 : Systèmes de points matériels et référentiels tournants

Exercices d'introduction

A Palan

1. Commençons par considérer le système composé de la poulie mobile et de la masse. Sur chaque brin de la poulie s'applique une tension $\vec{T}_1 = T_1 \vec{e}_y$. A l'équilibre, on a donc

$$mg = 2T_1 \quad (1)$$

La deuxième poulie est soumise à trois forces : Une tension \vec{T}_2 appliquée à chaque brin et une tension $\vec{T}_{1 \rightarrow 2}$ appliquée au point d'attache de la première poulie. A l'équilibre, on a

$$2T_2 = T_{1 \rightarrow 2}. \quad (2)$$

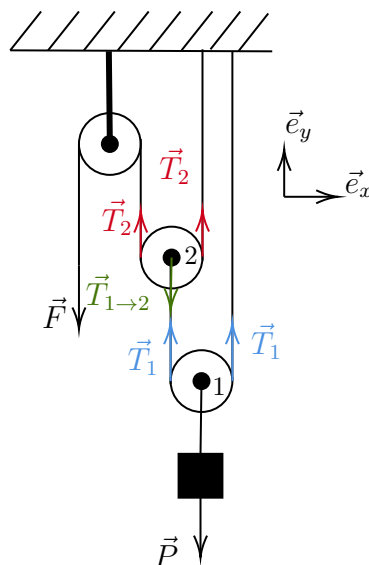
Or, le brin est inextensible donc $T_{1 \rightarrow 2} = T_1$, d'où $2T_2 = T_1$.

Finalement, la condition pour maintenir le système à l'équilibre s'écrit

$$F = T_2 = T_1/2. \quad (3)$$

Donc,

$$F = \frac{mg}{4}. \quad (4)$$



Problèmes

1 La chute de Constantibloc

1. Comme chaque masse est immobile, la somme des forces qui s'exercent sur elle est nulle, i.e. $\sum \vec{F} = \vec{0}$. De plus, on cherche la valeur maximale de m_2 telle que le système total reste immobile. Dans ce cas limite, la force de frottement est égale à $\mu_s R$.

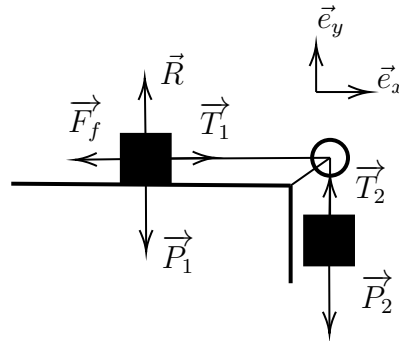
Sous-système m_1 : On a

$$\begin{aligned} F_f &= T_1, \quad \text{selon } \vec{e}_x, \\ m_1 g &= R \quad \text{selon } \vec{e}_y. \end{aligned} \quad (9)$$

Comme $F_f = \mu_s R$, on a $T_1 = \mu_s m_1 g$.

Sous-système m_2 : On a

$$m_2 g = T_2 \quad \text{selon } \vec{e}_y. \quad (10)$$



Le fil étant inextensible, $T_1 = T_2$, d'où $m_2 = \mu_s m_1$.

2. Quand le système est mis en mouvement, le coefficient de frottement est donné par μ_c et la force de frottement $F_f = \mu_c R$. Les masses m_1 et m_2 sont respectivement astreintes à se déplacer selon les directions \vec{e}_x et \vec{e}_y . On peut alors écrire $\vec{a}_1 = a_1 \vec{e}_x$ et $\vec{a}_2 = a_2 \vec{e}_y$. Pour déterminer l'accélération de m_1 et la tension du fil, on applique la 2ème loi de Newton sur chaque sous-système.

Sous-système m_1 :

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= -F_f + T \\ &= -\mu_c R + T = -\mu_c m_1 g + T \end{aligned} \quad (11)$$

Sous-système m_2 :

$$m_2 a_2 = m_2 g - T \quad (12)$$

De plus, la corde reste tendue, donc $a_1 = a_2$.

En utilisant les équations (11), (12) pour éliminer T , puis en utilisant $a_1 = a_2$, on obtient

$$m_2g - \mu_c m_1g = m_1a_1 + m_2a_2 = (m_1 + m_2)a_1, \quad (13)$$

d'où

$$a_1 = \frac{m_2g - \mu_c m_1g}{m_1 + m_2}. \quad (14)$$

D'après la question 1., $m_2 = \mu_s m_1$. L'équation (14) s'écrit donc

$$a_1 = g \frac{\mu_s - \mu_c}{1 + \mu_s}, \quad (15)$$

soit

$$T = m_1a_1 + \mu_c m_1g = \mu_s m_1g \frac{1 + \mu_c}{1 + \mu_s}. \quad (16)$$

3. Pour répondre correctement à cette question, on peut soit résoudre le problème depuis le début sans frottement, soit reprendre depuis l'équation (14) en fixant $\mu_c = 0$. On obtient ainsi

$$a_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}g \quad (17)$$

Comme la tension est la seule force qui met la masse m_1 en mouvement, l'application du PFD (pour les normes des vecteurs) donne directement :

$$T = ma_1 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}g \quad (18)$$

Si, par contre, nous partons de l'équation (16) et prenons la limite $\mu_s, \mu_c \rightarrow 0$, nous obtenons $T = 0$, ce qui n'est pas correct en général. Mais comme ce résultat dépend de la relation $m_2 = \mu_s m_1$ trouvée en 1., la limite $\mu_s \rightarrow 0$ implique aussi $m_2 \rightarrow 0$. Lorsque la masse m_2 est nulle, la tension dans le fil est effectivement nulle, résolvant le paradoxe apparemment.

Cet exemple illustre une difficulté récurrente dans les problèmes de physique lorsqu'il s'agit de passer à la limite. Il est fréquent de rencontrer de tels paradoxes si on n'est pas assez attentif. Pour en savoir plus à ce sujet, nous recommandons la lecture du chapitre 1.1 de l'excellent livre de Walter Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*.

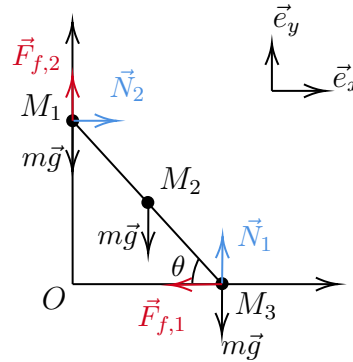
2 Barre inclinée

Considérons le système composé des trois masses. Les forces qui s'appliquent sur le système sont :

- Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$ de chaque masse.
- La réaction du mur $\vec{N}_2 = N_2\vec{e}_x$.
- La réaction du sol $\vec{N}_1 = N_1\vec{e}_y$.
- La force de frottements du sol $\vec{F}_{f,1} = -F_{f,1}\vec{e}_x$.
- La force de frottements du mur $\vec{F}_{f,2} = F_{f,2}\vec{e}_y$.

Dans le cas statique, le principe fondamental donne

$$\begin{aligned} N_2 - F_{f,1} &= 0, \\ N_1 + F_{f,2} - 3mg &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$



De plus, d'après le théorème du moment cinétique

$$\frac{d\vec{L}_{M_2}}{dt} = 0 \implies \vec{M}_{M_2} = \vec{0}. \quad (20)$$

où L_{M_2} et M_{M_2} sont respectivement le moment cinétique et le moment de force par rapport à la position de la masse M_2 . On obtient donc une troisième equation donnée par

$$\vec{M}_{M_2} = \overrightarrow{M_2M_1} \wedge (m\vec{g} + \vec{F}_{f,2} + \vec{N}_2) + \overrightarrow{M_2M_2} \wedge m\vec{g} + \overrightarrow{M_2M_3} \wedge (m\vec{g} + \vec{F}_{f,1} + \vec{N}_1) = 0, \quad (21)$$

Dans la base \vec{e}_x, \vec{e}_y , on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{M_2M_1} &= -L \cos \theta \vec{e}_x + L \sin \theta \vec{e}_y, \\ \overrightarrow{M_2M_3} &= L \cos \theta \vec{e}_x - L \sin \theta \vec{e}_y, \end{aligned} \quad (22)$$

et $\overrightarrow{M_2M_3} = \vec{0}$. On obtient donc

$$\vec{M}_{M_2} = (-LF_{f,2} \cos \theta - LN_2 \sin \theta + LN_1 \cos \theta - LF_{f,1} \sin \theta) \vec{e}_z = \vec{0}. \quad (23)$$

On cherche la valeur critique θ_c telle que la barre est immobile. Dans ce cas, les forces de frottements sont égales à $F_{f,1} = \mu_s N_1$ et $F_{f,2} = \mu_s N_2$. L'équation (23) donne

$$-L\mu_s N_2 \cos \theta_c - LN_2 \sin \theta_c + LN_1 \cos \theta_c - L\mu_s N_1 \sin \theta_c = 0. \quad (24)$$

Il en suit que

$$\tan \theta_c = \frac{N_1 - \mu_s N_2}{N_2 + \mu_s N_1}. \quad (25)$$

En utilisant la relation $N_2 = \mu_s N_1$, on a alors

$$\tan \theta_c = \frac{1 - \mu_s^2}{2\mu_s}, \quad (26)$$

soit

$$\theta_c = \arctan \left(\frac{1 - \mu_s^2}{2\mu_s} \right). \quad (27)$$

Remarque : On pourrait aussi calculer le moment de force par rapport au point O . Dans ce cas,

$$\vec{M}_O = 2L \cos \theta (N_1 - mg) - 2L \sin \theta N_2 - L \cos \theta mg = 0. \quad (28)$$

On peut montrer que cette équation est équivalente à l'équation (24) en utilisant les conditions d'équilibre (19).

Complément de réponse : Dans la solution proposée ci-dessus, nous avons supposé que, à l'angle critique θ_c auquel la barre commence à glisser, les forces de frottement sur les deux points de contact sont saturées (égales à μN_1 et μN_2). Même si cette hypothèse peut sembler très naturelle, pour une solution complète du problème il faut la démontrer. On commence par la condition d'équilibre du système rigide de trois masses, ce qui exige que la somme des forces et la somme des moments soient nulles. Parce qu'il y a deux degrés de liberté de translation et un degré de liberté de rotation, nous arrivons à trois équations :

$$\begin{cases} \sum_i \vec{F}_i \cdot \hat{e}_x = 0 & \Rightarrow N_2 - F_1 = 0 \\ \sum_i \vec{F}_i \cdot \hat{e}_y = 0 & \Rightarrow F_2 - W + N_1 = 0 \\ \sum_i (\vec{r} \wedge \vec{F}_i) \cdot \hat{e}_z = 0 & \Rightarrow N_1 \cos \theta - F_2 \cos \theta - N_2 \sin \theta - F_1 \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (29)$$

où F_1, F_2 sont les magnitudes des forces de frottement, N_1, N_2 sont les magnitudes des forces de réaction normale et $W = 3mg$ est le poids total. Dans le système d'équations (29), il y a trois équations linéairement indépendantes pour quatre inconnues, ce qui rend le système sous-déterminé (i.e. il existe plus d'une solution). Donc, il n'est pas possible de calculer la magnitude de chaque force en équilibre avec les données fournies par l'exercice (un tel calcul nécessiterait de connaître les propriétés du matériau qui compose la barre).

Néanmoins, l'angle critique de glissement peut être calculé. En plus des équations (29), la condition d'équilibre requiert que les frottements satisfassent les inégalités :

$$\begin{cases} 0 \leq F_1 \leq \mu N_1 & \Leftrightarrow 0 \leq F_1 \leq \mu(W - F_2) \\ 0 \leq F_2 \leq \mu N_2 & \Leftrightarrow 0 \leq F_2 \leq \mu F_1. \end{cases} \quad (30)$$

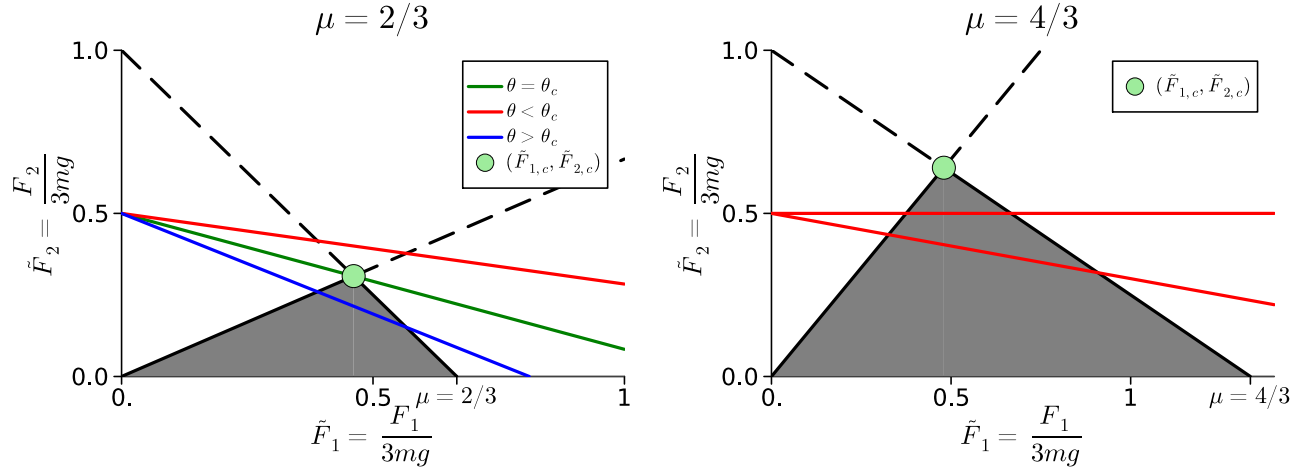
S'il existe au moins une solution des conditions (29) et (30), le système restera statique. En introduisant les variables adimensionnelles $\tilde{F}_1 = F_1/W$ et $\tilde{F}_2 = F_2/W$, on peut résumer les conditions d'équilibre comme

$$\tilde{F}_2 = 1/2 - \tilde{F}_1 \tan \theta \quad (31)$$

$$0 \leq \tilde{F}_1 \leq \mu (1 - \tilde{F}_2) \quad (32)$$

$$0 \leq \tilde{F}_2 \leq \mu \tilde{F}_1. \quad (33)$$

Ces conditions sont illustrées graphiquement sur la figure :



Si $\mu < 1$, l'existence d'au moins une solution pour les conditions d'équilibre dépendra de l'angle θ , qui détermine la pente de la droite (31). Si la pente est suffisamment grande pour que la droite intersecte la région définie par les inégalités (32) et (33), le système restera statique.

En utilisant la visualisation graphique, il est clair pourquoi l'angle critique est déterminé par la saturation des forces de frottement F_1, F_2 : si l'angle θ est progressivement diminué, le glissement commencera quand la droite (31) passe sur le sommet de la région grise, ce qui correspond au moment où les deux forces de frottement sont saturées. Les coordonnées du sommet sont

$$(\tilde{F}_1^c, \tilde{F}_2^c) = \left(\frac{\mu}{1 + \mu^2}, \frac{\mu^2}{1 + \mu^2} \right). \quad (34)$$

Donc, l'angle critique est la solution de l'équation

$$1/2 - \tilde{F}_1^c \tan \theta_c = \tilde{F}_2^c \Leftrightarrow \theta_c = \arctan \left(\frac{1 - \mu^2}{2\mu} \right). \quad (35)$$

On retrouve donc la solution (27).

Si $\mu > 1$, la droite intersecte toujours la région grise, et donc le système de trois masses reste statique pour n'importe quel angle, et il existe une infinité de solutions pour la répartition des forces entre les deux points d'appui.

3 Point matériel dans un référentiel tournant

On choisit un référentiel $Oxyz$ tournant avec la tige, et le repère associé $O\hat{e}_x\hat{e}_y\hat{e}_z$ (voir dessin). Le vecteur \hat{e}_x est dans la direction de la tige, avec origine le point O , et \hat{e}_z est dans le plan vertical contenant la tige. La tige tourne avec un vitesse angulaire Ω verticale, donc

$$\vec{\Omega} = \Omega \cos \alpha \hat{e}_x + \Omega \sin \alpha \hat{e}_z. \quad (36)$$

a) Dans le référentiel lié à la tige, les forces exercées sur le point P sont :

- le poids $m\vec{g} = -mg \cos \alpha \hat{e}_x - mg \sin \alpha \hat{e}_z$,
- la force de rappel du ressort, dirigée le long de la tige, $\vec{F} = -k(x - l_0)\hat{e}_x$,

- la force de liaison de P sur la tige, perpendiculaire à la tige, $\vec{N} = N_y \hat{e}_y + N_z \hat{e}_z$ (dans le dessin ci-dessous, le vecteur \vec{N} n'est pas dans le plan de la feuille, en fait la composante N_y compense la force de Coriolis),
- la force de Coriolis

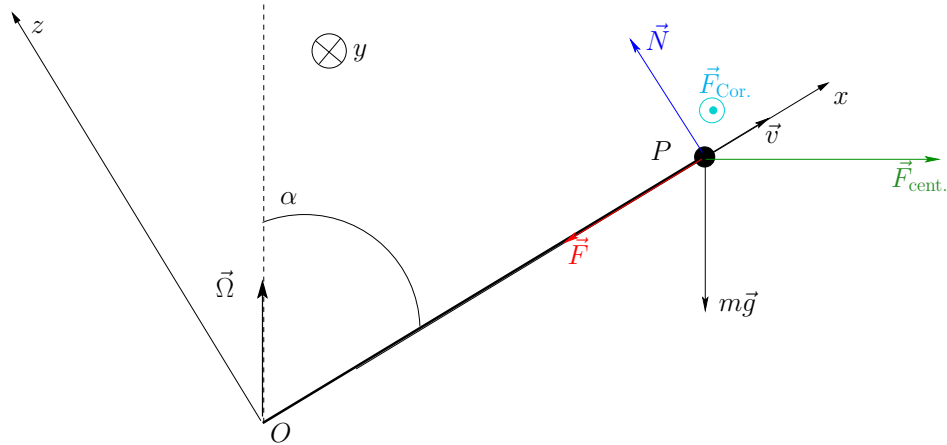
$$\vec{F}_{\text{Coriolis}} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = -2m \begin{pmatrix} \Omega \cos \alpha \\ 0 \\ \Omega \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2m \begin{pmatrix} 0 \\ \Omega \sin \alpha \dot{x} \\ 0 \end{pmatrix},$$

qui n'a pas de composante selon \hat{e}_x ,

- et la force centrifuge,

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{Centrifuge}} &= -m\vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}) \\ &= -m\vec{\Omega} \wedge \left(\begin{pmatrix} \Omega \cos \alpha \\ 0 \\ \Omega \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = -m \begin{pmatrix} \Omega \cos \alpha \\ 0 \\ \Omega \sin \alpha \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ x\Omega \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} mx\Omega^2 \sin^2 \alpha \\ 0 \\ -mx\Omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- Les autres forces d'inertie sont nulles, car l'origine du référentiel tournant est fixe dans le référentiel d'inertie, et que la vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ est constante.



On peut alors écrire l'équation du mouvement dans le référentiel tournant, $\sum \vec{F}^{\text{ext}} + \sum \vec{F}^{\text{inertie}} = m\vec{a}'$, selon \hat{e}_x :

$$-mg \cos \alpha - k(x - l_0) + mx\Omega^2 \sin^2 \alpha = m\ddot{x}. \quad (37)$$

qui peut se récrire

$$m\ddot{x} = -(k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha)x + (kl_0 - mg \cos \alpha). \quad (38)$$

On reconnaît l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique de pulsation

$$\omega = \sqrt{\frac{k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha}{m}},$$

pour autant que $k > m\Omega^2 \sin^2 \alpha$.

b) A l'équilibre dans le référentiel de la tige, le point matériel a une accélération nulle ($\ddot{x} = 0$). De l'équation du mouvement, on trouve alors la position d'équilibre x_{eq} telle que

$$-(k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha)x_{eq} + (kl_0 - mg \cos \alpha) = 0. \quad (39)$$

d'où

$$(k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha)x_{eq} = kl_0 - mg \cos \alpha, \quad (40)$$

et la solution est

$$x_{eq} = \frac{kl_0 - mg \cos \alpha}{k - m\Omega^2 \sin^2 \alpha}. \quad (41)$$

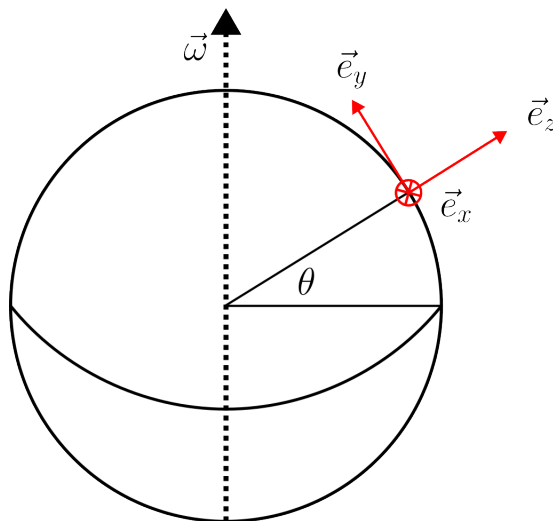
Les cas limites donnent :

- $k \rightarrow \infty \Rightarrow x_{eq} = l_0$, qui correspond à un ressort rigide qui n'est pas affecté par le poids ni la force centrifuge.
- $\Omega = 0 \Rightarrow x_{eq} = l_0 - \frac{mg}{k} \cos \alpha$.
- $\alpha = \pi/2 \Rightarrow x_{eq} = \frac{kl_0}{k - m\Omega^2}$.

4 Déviation vers l'est

- a) Le référentiel lié à la Terre n'est pas galiléen, mais en rotation autour de l'axe Nord-Sud. Les forces s'exerçant sur le mobile sont donc :
- La force de gravité $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$.
 - La force centrifuge $\vec{F}_{\text{cen}} = m\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})$.
 - La force de Coriolis $\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$.
- b) Un ordre de grandeur de ω est $\omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600} s^{-1} = 7.27 \times 10^{-5} s^{-1}$. L'amplitude de la force centrifuge est donc au mieux de $\omega^2 R_T \approx 0.034 m s^{-2} \ll g$. On peut donc la négliger dans un premier temps.
- c) Si on néglige la force de Coriolis, l'objet se déplace uniquement dans la direction \vec{e}_z . Si la vitesse est donnée par $\vec{v} = \dot{z}\vec{e}_z$, la force de Coriolis est alors

$$-2m\vec{\omega} \wedge \dot{z}\vec{e}_z = -2m\omega\dot{z} \cos \theta \vec{e}_x.$$



* Au vu des conditions initiales, la latitude est donc conservée au cours du mouvement. Les équations du mouvement sont données par

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega\dot{z} \cos \theta \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = -mg \end{cases}$$

- d) Résolvons d'abord l'équation du mouvement selon z . On a :

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \dot{z}(0)t + z(0)$$

$$z(t) = -\frac{g}{2}t^2$$

Le mobile a chuté de h a un temps $t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.

Maintenant, dans la direction x , on obtient $m\ddot{x} = 2m\omega \cos \theta gt$. Une première intégration (en utilisant $\dot{x}(0) = 0$) nous donne

$$\dot{x} = g\omega \cos \theta t^2.$$

Une seconde intégration donne

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega \cos \theta t^3.$$

Au moment où l'objet a atteint la profondeur h , on a donc

$$x = \frac{1}{3}\omega g \left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}} \cos \theta.$$

L'objet s'est bien déplacé vers l'est (quelque soit notre hémisphère de départ).

e) Le temps de chute est égal à

$$t_h = \sqrt{\frac{2h}{g}} \approx 5.68s.$$

La vitesse angulaire est égale à $7.27 \times 10^{-5} s^{-1}$. Ensemble, on obtient finalement

$$x(t) = \frac{1}{3}g\omega \cos \theta t^3 \approx 0.0435 \cos \theta m \approx 2.74cm.$$

La vitesse maximale de la masse est atteinte au moment de l'impact au sol.

$$\dot{z} = -gt \approx 55.7ms^{-1}$$

$$\dot{x} = g\omega \cos \theta t^2 \approx 0.023 \cos \theta ms^{-1} \approx 0.0145ms^{-1}.$$

La vitesse dans la direction \vec{e}_x est donc bien négligeable comparée à la vitesse verticale.

Compléments de cours, hors programme

f) La force de Coriolis est maintenant donnée par

$$\vec{F}_{\text{cor}} = -2m\omega \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = -2m\omega \begin{pmatrix} \dot{z} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta \\ \dot{x} \sin \theta \\ -\dot{x} \cos \theta \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement sont alors données par

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -2m\omega(\dot{z} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta) \\ m\ddot{y} = -2m\omega\dot{x} \sin \theta \\ m\ddot{z} = -mg + 2m\omega\dot{x} \cos \theta \end{cases}$$

g) On dérive la première équation du mouvement :

$$\ddot{x} = -2\omega(\dot{z} \cos \theta - \dot{y} \sin \theta)$$

On peut alors utiliser les deux autres équations pour obtenir :

$$\ddot{x} = -2\omega((-g + 2\omega\dot{x} \cos \theta) \cos \theta - (-2\omega\dot{x} \sin \theta) \sin \theta)$$

$$\ddot{x} = 2\omega g \cos \theta - 4\omega^2 \dot{x}$$

On reconnaît là l'équation d'un oscillateur harmonique avec une fréquence 2ω , plus un terme constant. La solution particulière est $\dot{x} = \frac{g}{2\omega} \cos \theta$. La solution générale est $\dot{x} = A \cos(2\omega t) + B \sin(2\omega t)$. À $t = 0$, l'équation du mouvement nous donne $\ddot{x}(0) = 0$ car $\vec{v} = \vec{0}$. En utilisant les conditions initiales $\dot{x}(0) = \ddot{x}(0) = 0$, on obtient donc

$$\dot{x} = \frac{g \cos \theta}{2\omega} (1 - \cos 2\omega t)$$

Pour trouver $x(t)$, il nous suffit d'intégrer cette expression et d'utiliser $x(0) = 0$:

$$x(t) = \frac{g}{2\omega} \cos \theta \left(t - \frac{\sin(2\omega t)}{2\omega} \right).$$

h) Nous pouvons maintenant utiliser les autres équations du mouvement :

$$\ddot{y} = -2\omega \dot{x} \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{y} = -g \cos \theta (1 - \cos 2\omega t) \sin \theta$$

Une première intégration et $\dot{y}(0) = 0$ nous donne

$$\dot{y} = -\frac{g \sin 2\theta}{2} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right).$$

Une seconde intégration et $y(0) = 0$ nous donne finalement :

$$y(t) = -\frac{g \sin 2\theta}{2} \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2} \right).$$

De la même façon, on obtient

$$\ddot{z} = -g + g \cos^2 \theta (1 - \cos 2\omega t)$$

$$\dot{z} = -gt + g \cos^2 \theta \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right)$$

$$z(t) = -g \frac{t^2}{2} + g \cos^2 \theta \left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2} \right).$$

i) La durée de la chute reste de l'ordre de quelques secondes. On est donc dans un cas où $\omega t \ll 1$. En utilisant les formules données dans l'énoncé, on obtient :

$$x(t) \approx \frac{g}{2\omega} \cos \theta \frac{(2\omega t)^3}{12\omega} = \frac{t^3}{3} g \omega \cos \theta.$$

On retrouve bien le résultat précédent.

Pour $z(t)$, on obtient :

$$z(t) \approx -g \frac{t^2}{2} + g \cos^2 \theta \frac{(2\omega t)^4}{96\omega^2} = -g \frac{t^2}{2} + g \omega^2 \cos^2 \theta \frac{t^4}{6}.$$

À nouveau, on vérifie que le terme dominant correspond bien à celui que l'on avait trouvé au préalable. Pour trouver le nouveau temps de chute t_* , on résout le polynôme d'ordre 2 :

$$\Delta = \frac{g^2}{4} - \frac{gh\omega^2}{6} \cos^2 \theta$$

$$t_*^2 = \frac{6}{g\omega^2 \cos^2 \theta} \left(\frac{g}{2} - \sqrt{\Delta} \right) \approx 5.68s.$$

Le temps de chute a en fait changé de $1e - 7s$, ce qui est largement négligeable.

Enfin le déplacement sur l'axe nord-sud est donné par :

$$y(t) \approx -\frac{g \sin 2\theta}{2} \frac{(2\omega t)^4}{96\omega^2} = -\frac{g\omega^2 \sin 2\theta}{2} \frac{t^4}{6}.$$

Dans l'hémisphère nord, ce déplacement a lieu vers le sud, alors qu'il est vers le nord dans l'hémisphère sud. A la fin de la chute, $y = -8.97 \times 10^{-6}m$. Ce déplacement est largement négligeable, et très différent de la valeur observée. Celle-ci est probablement due à une erreur lors de l'expérience.