
Série 08 : Energie, moment cinétique

Exercices d'introduction

A Question conceptuelle

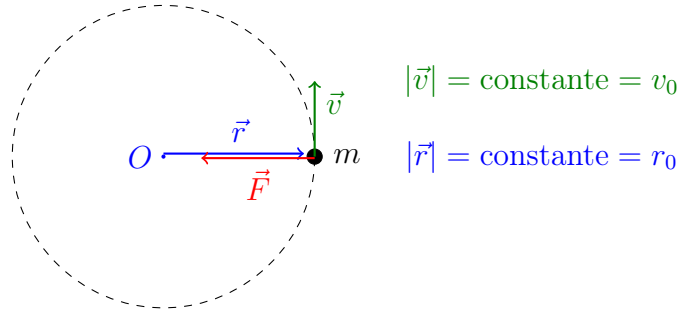
Cette question a été importante dans la réflexion de Newton et la réponse qu'il a donnée a permis à la science de se distancer de la conception antique qui considérait que la physique des astres était différente de celle des objets communs. La Lune comme la pomme subit une force d'attraction de la part de la Terre. Si une pomme, ou la Lune, est lâchée sans vitesse initiale, elle s'écrasera sur la Terre. Mais que se passe-t-il si la vitesse initiale a une composante transverse (perpendiculaire au vecteur position par rapport au centre de la Terre) non nulle ? Dans le cas de la pomme «sur la Terre», pour des conditions usuelles, la force d'attraction est considérée comme constante (et la surface de la Terre comme plane). Donc la trajectoire résultante est une parabole coupant la surface de la Terre.

Imaginez maintenant que la pomme puisse être lancée à une très grande vitesse. Il n'est alors plus possible de considérer la force d'attraction comme constante (et la surface de la Terre comme plane). La trajectoire n'est plus une parabole. Il s'agit d'une ellipse qui ramènerait la pomme à sa position initiale si cette trajectoire ne coupait pas la surface de la Terre. C'est la situation de la Lune : la force d'attraction entre elle et la Terre résulte en une trajectoire elliptique qui, étant donné les conditions initiales, ne coupe pas la surface de la Terre. En conclusion, on peut dire en jouant sur les mots, que la Lune «tombe» sur la Terre, mais que, du fait de sa vitesse transverse, elle tombe en fait «à côté de la Terre», et donc elle continue à tomber à l'infini en orbitant autour de la Terre. Pour une explication plus détaillée et imagée, voir la vidéo https://www.youtube.com/watch?v=XzYk-V8j_Nk

Pour le physicien, la Lune ne tombe pas sur la Terre car son moment cinétique \vec{L} par rapport à la Terre est conservé. Ceci vient du fait que la force gravitationnelle exercée par la Terre sur la Lune est une force centrale. Le moment cinétique de la Lune vaut $\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}$, où \vec{r} est le vecteur reliant la Terre à la Lune et $\vec{p} = m\vec{v}$ la quantité de mouvement de la Lune. Pour que la Lune puisse tomber sur la Terre, c'est-à-dire atteindre la position $\vec{r} = 0$, il faudrait que son moment cinétique soit nul, et ceci déjà maintenant. Or ce moment cinétique ne peut être zéro maintenant que si \vec{p} et \vec{r} sont colinéaires, c'est-à-dire si la vitesse de la lune est purement radiale (ou bien nulle). Ceci n'est manifestement pas le cas, la vitesse étant presque exclusivement transverse.

B Moment cinétique

1. Le mouvement est circulaire uniforme. La résultante \vec{F} des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est centrale. En choisissant une origine O située au centre du cercle, le moment de cette force est nulle en tout temps : $\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.



Le moment cinétique par rapport au point O est donné par

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v}.$$

En tout point de la trajectoire, ce vecteur est perpendiculaire au plan de la trajectoire. Son sens est donné par la règle du tire-bouchon : $\odot \vec{L}$. De plus, sa norme est constante :

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}||\vec{v}| \sin \alpha = mr_0 v_0 \cdot 1 = mr_0 v_0,$$

car le vecteur position \vec{r} est, durant le mouvement, toujours perpendiculaire au vecteur vitesse \vec{v} . Remarquons que cette conclusion (\vec{L} constant) n'est pas valable pour tout choix de l'origine O . En choisissant par exemple une origine située en-dessous du plan du cercle, on se convainc assez facilement que le vecteur moment cinétique n'est pas constant durant le mouvement.

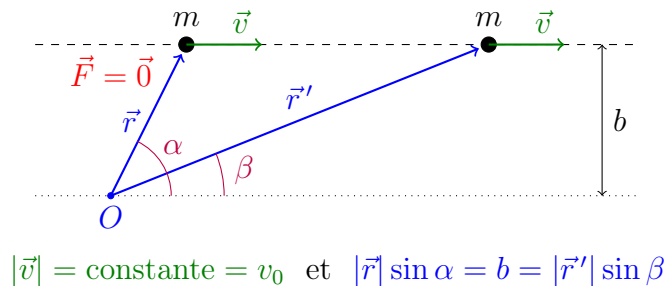
En accord avec le théorème du moment cinétique, le moment cinétique est bien conservé :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{constant}}.$$

2. Le mouvement est rectiligne uniforme. La résultante \vec{F} des forces s'exerçant sur l'objet de masse m est donc nulle. Par conséquent, le moment de force par rapport à n'importe quelle origine O est nul en tout temps :

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{0}.$$

Considérons l'objet de masse m à deux instants :



Le moment cinétique par rapport au point O est donné par

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge m\vec{v} \text{ ou } \vec{L}' = \vec{r}' \wedge m\vec{v}.$$

Ces vecteurs sont perpendiculaires au plan formé par la trajectoire et l'origine O , et leur sens est donné par la règle du tire-bouchon : $\otimes \vec{L}, \vec{L}'$. De plus, la norme du moment cinétique est constante :

$$|\vec{L}| = m|\vec{r}|v_0 \sin \alpha = mb v_0 = m|\vec{r}'|v_0 \sin \beta = |\vec{L}'|.$$

Remarquons que cette conclusion (\vec{L} constant) reste vraie quelle que soit l'origine O choisie. Par exemple, dans le cas d'une origine située sur la trajectoire, le moment cinétique est constamment nul.

Enfin, ce résultat est en accord avec le théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_O = \overrightarrow{\text{constant}}.$$

C Moment de force : bras de levier

1. L'efficacité de la mise en rotation est mesurée par le moment de force de \vec{F} par rapport à A . La norme de ce moment de force est

$$||\vec{M}_A|| = bF,$$

où b est le bras de levier et $F = ||\vec{F}||$.

Comme la force est fixée, la norme $||\vec{M}_A||$ est maximale lorsque b est maximal. Ainsi,

$$b = R \text{ pour } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \pi$$

(la force \vec{F} est alors tangente à la roue).

2. Comme la force est fixée, la norme $||\vec{M}_A||$ est minimale pour b minimal. Ainsi,

$$b = 0 \text{ pour } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ ou } \alpha = \frac{3\pi}{2}$$

(la force \vec{F} est alors normale à la roue).

3. On exploite la définition du moment de force par rapport à A :

$$\vec{M}_A = \overrightarrow{AP} \wedge \vec{F}.$$

Selon \vec{e}_z , la norme du moment de force s'écrit

$$||\vec{M}_A|| = b(\alpha) F = R |\cos \alpha| F,$$

où $F = ||\vec{F}||$.

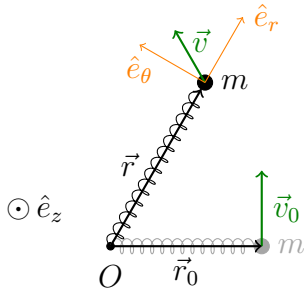
- Pour $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, la rotation induite est de sens trigonométrique et le moment \vec{M}_A est **sortant** :

$$\odot \vec{M}_A.$$

- Pour $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, la rotation induite est dans le sens des aiguilles d'une montre et le moment \vec{M}_A est **entrant** :

$$\otimes \vec{M}_A.$$

D Mouvement dans un potentiel central



Les forces exercées sur l'objet sont son poids, le soutien de la table et la force de rappel du ressort :

$$m\vec{g} + \vec{S} - k\vec{d} = m\vec{a},$$

où \vec{d} est le vecteur allongement du ressort. L'accélération n'a pas de composante verticale, et dans le plan de la table seule la force de rappel du ressort a une composante non nulle. On peut donc écrire :

$$-k\vec{d} = m\vec{a}.$$

La force de rappel du ressort est conservative et toujours dirigée vers O : c'est une force centrale. Par conséquent,

— l'énergie mécanique est conservée :

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \forall t$$

— le moment cinétique par rapport à O est conservé :

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r}_0 \times m\vec{v}_0 = \ell_0 m v_0 \hat{e}_z \quad \forall t,$$

l'axe \hat{e}_z étant dirigé vers le haut (donc sortant du plan de dessin).

Problèmes

1 Encore l'araignée

Les forces qui s'appliquent sur l'araignée sont

- son poids $m\vec{g}$, dirigé vers le bas,
- la tension dans le fil \vec{T} , dirigée vers le point d'attache du fil O .

Par rapport au point O , le moment de \vec{T} est nul car \vec{T} est colinéaire au vecteur \overrightarrow{OA} . Le moment de $m\vec{g}$ par rapport au point O vaut

$$\vec{M}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{g}.$$

Dans un repère associé aux coordonnées cylindriques (voir dessin), le moment s'écrit

$$\vec{M}_O = l\hat{e}_\rho \wedge mg(\cos\phi \hat{e}_\rho - \sin\phi \hat{e}_\phi) = -mgl \sin\phi \hat{e}_z. \quad (1)$$

Le moment cinétique de l'araignée par rapport au point O s'écrit :

$$\vec{L}_O = \overrightarrow{OA} \wedge m\vec{v} = l\hat{e}_\rho \wedge ml\dot{\phi} \hat{e}_\phi = ml^2\dot{\phi} \hat{e}_z, \quad (2)$$

où l'on a utilisé l'expression pour la vitesse $\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z$, et le fait que $\rho = l = \text{constante}$ et $\dot{z} = 0$. Le théorème du moment cinétique s'exprime comme suit :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O,$$

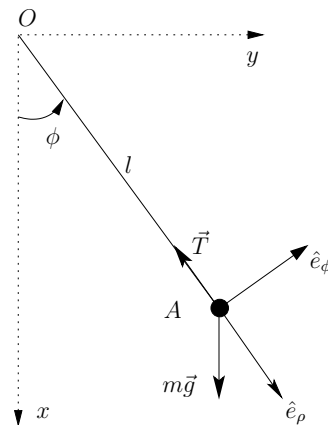
dans lequel on introduit les équations (1) et (9) :

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\phi}) = ml^2\ddot{\phi} = -mgl \sin\phi,$$

qui se récrit :

$$\ddot{\phi} = -\frac{g}{l} \sin\phi, \quad (3)$$

qui est bien l'équation du mouvement d'un pendule.

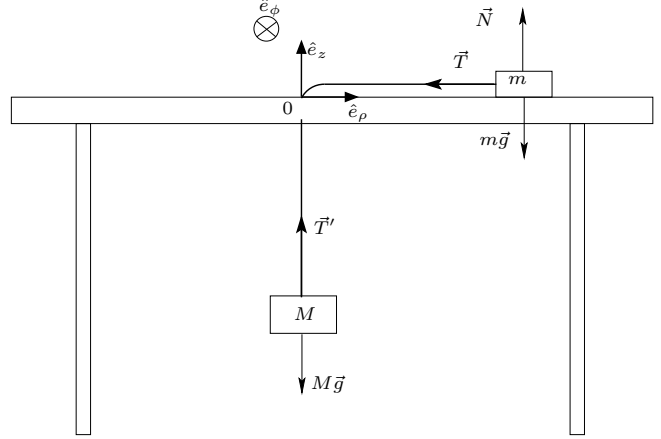


2 La table à trou

Les coordonnées les plus appropriées à la résolution de ce problème sont les coordonnées cylindriques. Soit $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ le repère associé à ces coordonnées. La vitesse et l'accélération s'écrivent

$$\vec{v} = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{z}\hat{e}_z, \quad (4)$$

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (5)$$



a) L'énergie mécanique totale du système est la somme des énergies cinétiques et potentielles des deux blocs.

— Energie cinétique de m : $E_{cin,m} = \frac{1}{2}m\vec{v}_m^2$. Mais la masse m est contrainte à se déplacer sur la table définie par $z_m = 0$, on a donc $\dot{z}_m = 0$. Il reste

$$\vec{v}_m = \dot{\rho}\hat{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi \quad \text{et} \quad E_{cin,m} = \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2). \quad (6)$$

— Energie cinétique de M : $E_{cin,M} = \frac{1}{2}M\vec{v}_M^2$. Mais la masse M n'a qu'un mouvement vertical, donc

$$\vec{v}_M = \dot{z}_M\hat{e}_z \quad \text{et} \quad E_{cin,M} = \frac{1}{2}M\dot{z}_M^2. \quad (7)$$

— Energie potentielle de m : $E_{pot,m} = mgz_m$, mais la masse est posée sur la table, donc $z_m = 0$ et $E_{pot,m} = 0$.

— Energie potentielle de M : $E_{pot,M} = Mgz_M$.

— Les forces de tension $\vec{T} = -|T|\hat{e}_\rho$ et $\vec{T}' = |T'|\hat{e}_z$ travaillent, mais elles ne dérivent pas d'un potentiel. Par contre, on sait que les deux tensions ont la même norme ($|T| = |T'|$), et que, puisque la longueur du fil est constante, une variation $d\rho$ de la coordonnée ρ du bloc de masse m sera égale à une variation dz de la coordonnée z du bloc de masse M . Les travaux de ces deux forces sont alors $\delta W = -|T|d\rho$ et $\delta W = |T'|dz = |T|d\rho$, c'est-à-dire de valeurs absolues égales mais de signes opposés. Leurs travaux s'annulent donc et ne contribuent pas à une variation de l'énergie mécanique du système.

On a donc l'énergie totale du système

$$E = \frac{1}{2}M\dot{z}_M^2 + \frac{1}{2}m(\rho^2\dot{\phi}^2 + \dot{\rho}^2) + Mgz_M.$$

Le fil qui relie les deux masses a une longueur fixe $L = |\rho| + |z_M|$. Comme ρ est toujours positif et z_M négatif, on peut écrire $z_M = \rho - L$ et donc $\dot{\rho} = \dot{z}_M$. Cette contrainte nous permet d'exprimer l'énergie en fonction d'une seule des deux coordonnées z_M et ρ (par exemple ρ) :

$$E = \frac{1}{2}(m + M)\dot{\rho}^2 + \frac{1}{2}m\rho^2\dot{\phi}^2 + Mg(\rho - L). \quad (8)$$

b) Les grandeurs conservées sont :

- L'énergie totale du système (8). Les forces qui s'appliquent sur la masse m sont le poids $m\vec{g}$, la force de soutien de la table $\vec{N} = -m\vec{g}$ et la tension exercée par le fil \vec{T} . Celles qui s'appliquent sur M sont le poids $M\vec{g}$ et la tension du fil \vec{T}' de même norme que \vec{T} (pour la direction de ces forces, voir le dessin). Les forces $m\vec{g}$ et \vec{N} sont perpendiculaires au mouvement de m , elles ne travaillent donc pas. Les forces \vec{T} et \vec{T}' travaillent, mais vu que $|\vec{T}| = |\vec{T}'|$ et $d\rho = dz_M$, on a $\delta W_T = \vec{T} \cdot \hat{e}_\rho d\rho = -|\vec{T}|d\rho = -|\vec{T}'|dz_M = -\vec{T}' \cdot \hat{e}_z dz = -\delta W'_T$.

Le poids $M\vec{g}$ travaille et est conservatif; l'énergie potentielle dont il dérive est incluse dans l'expression de l'énergie mécanique. Au final, l'énergie mécanique (8) est conservée, car toutes les forces sont conservatives, ne travaillent pas, ou leurs travaux s'anulent.

- Les résultantes des forces qui s'appliquent sur m ($\vec{N} + m\vec{g} + \vec{T}$) et sur M ($M\vec{g} + \vec{T}'$) sont des forces centrales (dirigées vers le trou de la table au point O) et donc le moment cinétique de chaque masse (par rapport au point O) est conservé. Calculons pour chaque bloc, le moment cinétique par rapport au point O :

- Pour le bloc de masse m

$$\vec{L}_{m,O} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = \rho\hat{e}_\rho \wedge m(\rho\dot{\phi}\hat{e}_\phi + \dot{\rho}\hat{e}_\rho) = m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_\rho \wedge \hat{e}_\phi = m\rho^2\dot{\phi}\hat{e}_z,$$

et donc

$$\vec{L}_{m,O} \cdot \hat{e}_z = L_z = m\rho^2\dot{\phi} = cte. \quad (9)$$

- Pour le bloc de masse M : un calcul similaire donne un moment cinétique (constamment) nul :

$$\vec{L}_{M,O} = z_M\hat{e}_z \wedge M\vec{v}_M = z_M\hat{e}_z \wedge M\dot{z}_M\hat{e}_z = \vec{0}. \quad (10)$$

c) Pour calculer les équations du mouvement, on peut soit utiliser la technique habituelle en partant de la deuxième loi de Newton, soit dériver les équations (8) et (9) qui sont les intégrales premières du mouvement. Comme il a été montré au cours, la conservation de l'énergie est une intégrale première de la deuxième équation de Newton. Ces deux méthodes sont donc équivalentes, seuls les calculs changent.

- Commençons par la deuxième méthode. La dérivée de (9) donne

$$\frac{dL_z}{dt} = m(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}) = 0. \quad (11)$$

Cette dérivée est nulle, car le moment cinétique est une constante.

On dérive ensuite l'équation (8), on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dE}{dt} = (M+m)\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\rho}\dot{\phi}^2 + m\rho^2\dot{\phi}\ddot{\phi} + Mg\dot{\rho} \\ &= (M+m)\dot{\rho}\ddot{\rho} + m\rho\dot{\phi}(\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) + Mg\dot{\rho}. \end{aligned}$$

Or on peut utiliser l'équation (11) et remplacer $\rho\ddot{\phi}$ par $-2\dot{\rho}\dot{\phi}$. On obtient

$$0 = (M+m)\ddot{\rho} - m\rho\dot{\phi}^2 + Mg. \quad (12)$$

- On peut aussi utiliser la deuxième loi de Newton. Les forces qui s'appliquent sur m sont le poids $m\vec{g}$, la réaction de la table \vec{N} ainsi que la tension du fil \vec{T} . Mais $m\vec{g}$ et \vec{N} sont de même norme et de sens opposés, elles s'annulent car la masse m n'a pas d'accélération verticale. Il reste $\vec{T} = m\vec{a}_m$. Sur M , il y a le poids $M\vec{g}$ et la tension du fil \vec{T}' . On a donc $\vec{T}' + M\vec{g} = M\vec{a}_M$.

On projette la première équation sur les vecteurs \hat{e}_ρ et \hat{e}_ϕ :

$$\text{sur } \hat{e}_\rho : \quad -T = m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \quad (13)$$

$$\text{sur } \hat{e}_\phi : \quad 0 = m(\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi}) \quad (14)$$

On a utilisé l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques. La deuxième équation projetée sur le vecteur \hat{e}_z donne :

$$T' - Mg = M\ddot{z} = M\ddot{\rho}. \quad (15)$$

De (15), on tire $T' = M\ddot{\rho} + Mg$, que l'on introduit dans (13) en utilisant que les normes de \vec{T} et \vec{T}' sont égales, pour obtenir

$$M\ddot{\rho} + Mg + m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = 0.$$

Cette équation est la même que (12). On peut aussi observer que les équations (14) et (11) sont identiques à un facteur ρ près.

- d) En utilisant la conservation du moment cinétique on peut injecter eq. (9) dans eq. (12) pour obtenir l'équation du mouvement portant seulement sur la coordonnée ρ

$$0 = (M + m)\ddot{\rho} - \frac{L_z^2}{m\rho^3} + Mg. \quad (16)$$

Cette équation n'a pas de solution générale simple, par contre on peut s'intéresser aux "orbites" circulaires pour lesquelles ρ est une constante, et donc $\ddot{\rho} = 0$. Ainsi, une solution circulaire avec $\rho = R$ doit satisfaire :

$$0 = -\frac{L_z^2}{mR^3} + Mg \quad \implies \quad L_z^2 = mMgR^3 \quad (17)$$

Or, dans un mouvement circulaire la vitesse v est toujours perpendiculaire au rayon et le moment cinétique s'exprime simplement comme $L_z = mvR$. En injectant dans (17) on obtient la solution recherchée :

$$v^2 R^2 m^2 = mMgR^3 \quad \implies \quad v^2 = \frac{Mg}{m} R \quad (18)$$

On peut vérifier ce résultat en remarquant que dans cette situation la masse M est à l'équilibre, et donc la tension dans le fil vaut Mg . Or la force centripète mv^2/R subit par m provient de la tension du fil, d'où $m\frac{v^2}{R} = Mg$.

3 Le pendule asymétrique

Les forces qui s'appliquent sur la bille sont le poids, qui est une force conservative, et la tension dans le fil, qui ne fournit aucun travail puisqu'elle est normale à la trajectoire. La conservation de l'énergie mécanique peut donc être utilisée pour répondre aux questions de ce problème.

a) Initialement, à la position 1, l'énergie E_1 de la bille est

$$E_1 = E_{cin,1} + E_{pot,1} = \frac{1}{2}mv_0^2 - mg(d + L \cos \alpha), \quad (19)$$

où l'on a exprimé l'énergie potentielle par rapport au point O .

Dans son extension maximale à l'opposé de la trajectoire (position 2), la bille est à l'arrêt ($E_{cin,2} = 0$) et le fil forme un angle β avec la verticale. On peut alors écrire l'énergie mécanique E_2

$$E_2 = \underbrace{E_{cin,2}}_{=0} + E_{pot,2} = -mg(d + L) \cos \beta. \quad (20)$$

La conservation de l'énergie mécanique $E_1 = E_2$ s'écrit

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - mg(d + L \cos \alpha) = -mg(d + L) \cos \beta, \quad (21)$$

d'où l'on trouve une expression générale pour la vitesse initiale de la bille :

$$v_0 = \sqrt{2gd(1 - \cos \beta) + 2gL(\cos \alpha - \cos \beta)}. \quad (22)$$

Dans le cas particulier où $\beta = \alpha$, alors l'expression pour v_0 se simplifie comme suit :

$$v_0 = \sqrt{2gd(1 - \cos \alpha)}. \quad (23)$$

b) La vitesse maximale v_{\max} est atteinte à la position où l'énergie cinétique est maximale et l'énergie potentielle est minimale. Cette position 3 est la plus basse de la trajectoire effectuée par la bille. L'énergie E_3 s'écrit

$$E_3 = E_{cin,3} + E_{pot,3} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 - mg(d + L). \quad (24)$$

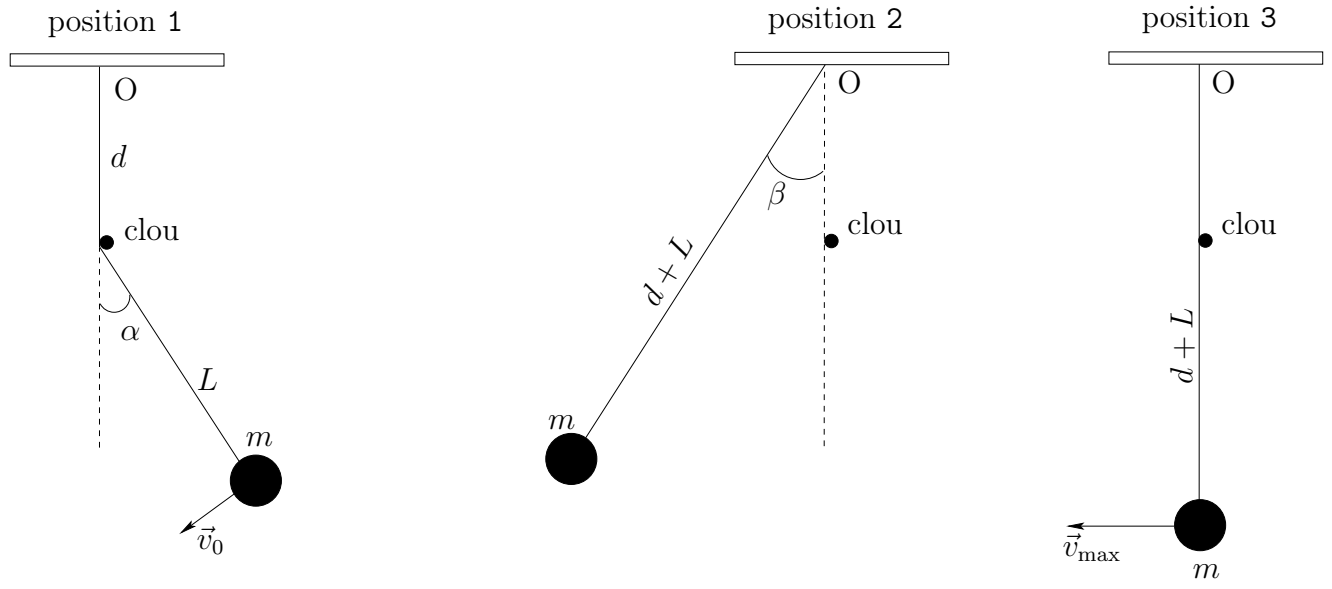
Par conservation de l'énergie, on a $E_3 = E_2$, et dans le cas particulier où $\beta = \alpha$, on a :

$$\frac{1}{2}mv_{\max}^2 - mg(d + L) = -mg(d + L) \cos \alpha, \quad (25)$$

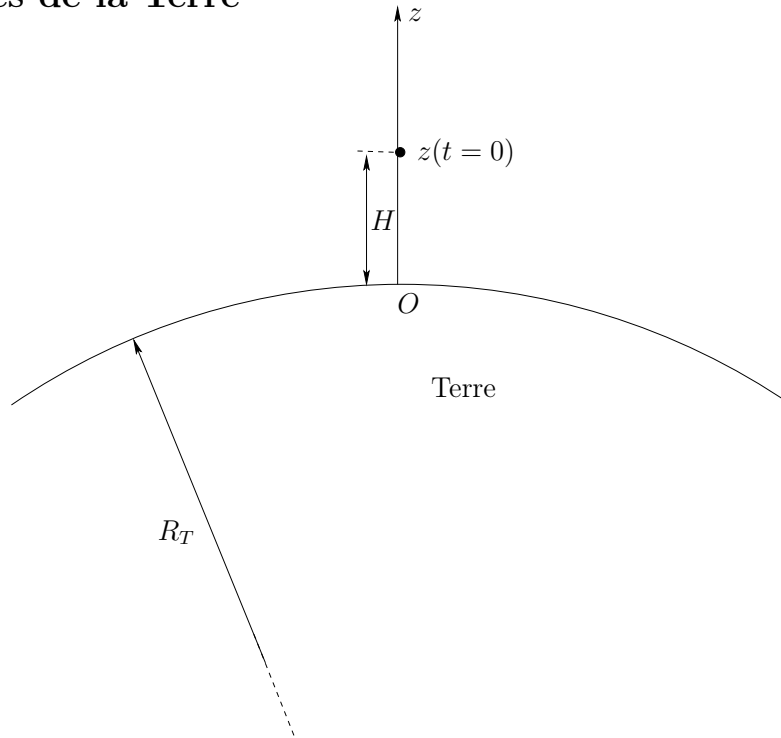
d'où l'on obtient

$$v_{\max} = \sqrt{2g(d + L)(1 - \cos \alpha)}. \quad (26)$$

Remarque : le même résultat aurait été obtenu en posant $E_3 = E_1$.



4 Chute libre près de la Terre



a) La seule force qui s'exerce sur la bille en $z(t)$ est la gravitation, qui s'écrit

$$\vec{F} = -\frac{GmM_T}{(R_T + z)^2} \hat{e}_z.$$

La deuxième loi de Newton donne alors l'équation du mouvement selon \hat{e}_z :

$$m\ddot{z} + \frac{GmM_T}{(R_T + z)^2} = 0. \quad (27)$$

b) En multipliant l'équation (27) par \dot{z} est en calculant les primitives on obtient :

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_T + z} \right] = 0,$$

L'énergie mécanique E correspond au terme entre crochets (à une constante près), elle est conservée.

c) A la hauteur H au dessus du sol, la vitesse est nulle, d'où

$$E(z = H) = -\frac{GmM_T}{R_T + H}.$$

Au niveau du sol, $z = 0$, et l'énergie mécanique s'écrit

$$E(z = 0) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 - \frac{GmM_T}{R_T},$$

En utilisant alors $E(z = H) = E(z = 0)$ on trouve la vitesse v au niveau du sol :

$$v = \dot{z}|_{z=0} = \sqrt{\frac{2}{m} \left(\frac{GmM_T}{R_T} - \frac{GmM_T}{R_T + H} \right)} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T} \left(\frac{H}{R_T + H} \right)}. \quad (28)$$

d) Dans le cas où l'accélération est une constante égale à l'accélération gravitationnelle au niveau du sol, $g = GM_T/R_T^2$, l'énergie mécanique E_g de la bille est

$$E_g(z_g, \dot{z}_g) = \frac{1}{2}m\dot{z}_g^2 + m\frac{GM_T}{R_T^2}z_g = m\frac{GM_T}{R_T^2}H.$$

Dans ce cas, la vitesse au sol devient

$$v_g = \dot{z}_g|_{z_g=0} = \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T^2}H}. \quad (29)$$

Pour comparer les deux vitesses données par les équations (28) et (29), on peut calculer leur différence :

$$\Delta v = v - v_g = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T} \left(\frac{H}{R_T + H} \right)} - \sqrt{2\frac{GM_T}{R_T^2}H} = \sqrt{\frac{2GM_T H}{R_T^2} \left(\sqrt{\frac{R_T}{R_T + H}} - 1 \right)},$$

et la différence relative

$$\frac{\Delta v}{v_g} = \sqrt{\frac{R_T}{R_T + H}} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{H}{R_T}}} - 1.$$

Puisque $\epsilon = \frac{H}{R_T} \ll 1$, on peut utiliser l'approximation $(1 + \epsilon)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{1+\epsilon}} \approx 1 - \frac{1}{2}\epsilon$, et exprimer la différence relative comme

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{H}{R_T}}} - 1 \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{H}{R_T} - 1 = -\frac{H}{2R_T}.$$

L'application numérique nous donne que pour une chute de $H = 1000$ m, la vitesse au niveau du sol est

$$v = \sqrt{\frac{2 \times 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.9 \cdot 10^{24}}{6371 \cdot 10^3} \left(\frac{1000}{6371 \cdot 10^3 + 1000} \right)} = 139.24 \text{ m/s}$$

pour la force qui dépend de la hauteur, et

$$v_g = \sqrt{2 \times \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.9 \cdot 10^{24}}{(6371 \cdot 10^3)^2} \times 1000} = 139.25 \text{ m/s}$$

pour le cas où l'accélération est constante. La différence vaut donc 0.01 m/s, et la différence relative est

$$\frac{\Delta v}{v_g} \approx -\frac{1000}{2 \times 6371 \cdot 10^3} = -8 \cdot 10^{-5},$$

ce qui montre que l'hypothèse de l'accélération constante proche de la surface de la Terre est une excellente approximation.

5 Vitesse de libération

On suppose que la seule force appliquée à l'objet est la force de gravitation liée à la présence de l'astre (de la Terre). La vitesse de libération est la vitesse initiale nécessaire au corps pour rejoindre « un point infiniment éloigné » de l'astre de l'astre avec une vitesse finale nulle.

Comme la force de gravitation est conservative, l'énergie mécanique de l'objet est conservée. A un instant donné, cette énergie a pour expression :

$$E_{\text{méc.}} = E_{\text{cin.}} + E_{\text{pot.}}^{\text{grav.}} = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{r} + C,$$

où m est la masse du corps, v est la vitesse de ce dernier, et r est la distance qui sépare le corps du centre de masse de l'astre. L'énergie potentielle de gravitation est définie à une constante arbitraire C près.

Ecrivons l'énergie mécanique que possède le corps à deux instants :

- Au moment où le corps quitte la surface de l'astre. Il possède alors une vitesse \vec{v}_0 (de norme $v_0 = \|\vec{v}_0\|$) et se trouve à une distance $r = R$ du centre de masse de l'astre (R est le rayon de l'astre).
- Au moment où le corps est très éloigné de l'astre. Il possède alors une vitesse $\vec{v}_\infty \cong \vec{0}$ et se trouve à une distance $r \rightarrow \infty$ du centre de masse de l'astre.

La conservation de l'énergie mécanique permet d'écrire :

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} + C}_{E_{\text{méc.}} \text{ à la surface de l'astre}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv_\infty^2 - \lim_{r \rightarrow \infty} G\frac{mM_{\text{astre}}}{r} + C}_{E_{\text{méc.}} \text{ très loin de l'astre}} \\ = 0 + 0 + C.$$

Ainsi,

$$\frac{1}{2}mv_0^2 - G\frac{mM_{\text{astre}}}{R} = 0,$$

et la vitesse initiale v_0 a pour expression :

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{astre}}G}{R}}.$$

Numériquement, nous obtenons, dans le cas de la Terre,

$$v_0 = \sqrt{\frac{2M_{\text{T}}G}{R_{\text{T}}}} \\ \cong \sqrt{\frac{2 \cdot 5.9742 \cdot 10^{24} \cdot 6.6732 \cdot 10^{-11}}{6.3710 \cdot 10^6}} \cong 1.1187 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1} \cong 11 \text{ km s}^{-1}.$$

On note que la vitesse v_0 ne dépend pas de la masse du corps. D'autre part, nous avons obtenu une vitesse de libération scalaire (et non pas vectorielle). Tout corps possédant cette vitesse v_0 est a priori susceptible d'échapper à l'attraction gravitationnelle de la Terre, et ce, quelle que soit la direction de sa vitesse initiale (pour autant évidemment que cette vitesse ne pointe pas en direction de l'astre). En pratique, il serait nécessaire d'affiner le calcul en tenant compte du frottement entre l'objet et l'atmosphère (traînée).