

Corrigé 04 : Coordonnées cylindriques et sphériques, Contraintes

Exercices d'introduction

A Changement de base

Dans le repère $Oxyz$, notre vecteur s'écrit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}_{Oxyz} = v_1 \hat{x} + v_2 \hat{y} + v_3 \hat{z}.$$

Comme il a été vu au cours, la composante d'un vecteur \vec{a} selon un axe u se trouve en utilisant le produit scalaire entre \vec{a} et le vecteur unitaire

$$\hat{u} : a_u = (\vec{a} \cdot \hat{u}) \hat{u}.$$

La coordonnée du vecteur \vec{v} sur l'axe Ox' vaut :

$$v'_1 = \vec{v} \cdot \hat{x}' = (v_1 \hat{x} + v_2 \hat{y} + v_3 \hat{z}) \cdot \hat{x}' = v_1 (\hat{x} \cdot \hat{x}') + v_2 (\hat{y} \cdot \hat{x}') + v_3 (\hat{z} \cdot \hat{x}').$$

La coordonnée du vecteur \vec{v} sur l'axe Oy' vaut :

$$v'_2 = \vec{v} \cdot \hat{y}' = (v_1 \hat{x} + v_2 \hat{y} + v_3 \hat{z}) \cdot \hat{y}' = v_1 (\hat{x} \cdot \hat{y}') + v_2 (\hat{y} \cdot \hat{y}') + v_3 (\hat{z} \cdot \hat{y}').$$

La coordonnée du vecteur \vec{v} sur l'axe Oz' vaut :

$$v'_3 = \vec{v} \cdot \hat{z}' = (v_1 \hat{x} + v_2 \hat{y} + v_3 \hat{z}) \cdot \hat{z}' = v_1 (\hat{x} \cdot \hat{z}') + v_2 (\hat{y} \cdot \hat{z}') + v_3 (\hat{z} \cdot \hat{z}').$$

Calculons $\hat{x} \cdot \hat{x}'$: on utilise la définition du produit scalaire $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \alpha$ où α est l'angle entre les vecteurs \vec{a} et \vec{b} . Dans notre cas, l'angle entre \hat{x} et \hat{x}' vaut θ (voir les deux figures ci-dessous). Les vecteurs unitaires étant par définition de norme 1, le produit scalaire s'écrit

$$\hat{x} \cdot \hat{x}' = \cos \theta.$$

De la même manière, on trouve

$$\hat{y} \cdot \hat{y}' = \cos \theta, \quad \hat{x} \cdot \hat{y}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin \theta \quad \text{et} \quad \hat{y} \cdot \hat{x}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin \theta.$$

Le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. Le vecteur $\hat{z} = \hat{z}'$ est orthogonal à \hat{x} , \hat{x}' , \hat{y} et \hat{y}' . Tous les autres produits scalaires sont donc nuls, sauf le terme $\hat{z} \cdot \hat{z}'$ qui vaut 1.

Dans le repère $Ox'y'z'$, le vecteur \vec{v} s'écrit donc

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix}_{Ox'y'z'} = \begin{pmatrix} v_1 \cos \theta + v_2 \sin \theta \\ -v_1 \sin \theta + v_2 \cos \theta \\ v_3 \end{pmatrix}$$

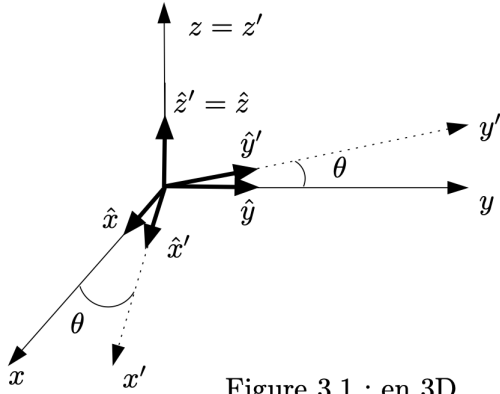


Figure 3.1 : en 3D

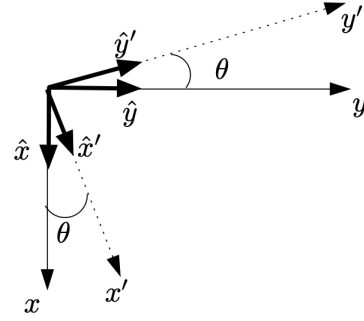


Figure 3.2 : en 2D, dans le plan Oxy

ou, sous forme matricielle,

$$\begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

B Système de coordonnées sphériques

a) Le vecteur \vec{e}_x s'exprime dans la base des coordonnées sphériques par :

$$\vec{e}_x = (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_r) \vec{e}_r + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\theta) \vec{e}_\theta + (\vec{e}_x \cdot \vec{e}_\phi) \vec{e}_\phi \quad (1)$$

et de même pour \vec{e}_y, \vec{e}_z . En utilisant l'expression de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ en fonction de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$

$$\begin{cases} \vec{e}_r = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \vec{e}_x + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z \\ \vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{e}_x + \cos \phi \vec{e}_y \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \sin \theta \cos \phi \vec{e}_r + \cos \theta \cos \phi \vec{e}_\theta - \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y = \sin \theta \sin \phi \vec{e}_r + \cos \theta \sin \phi \vec{e}_\theta + \cos \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta \end{cases}.$$

b) Le vecteur position \vec{OP} s'écrit dans la base de coordonnées sphériques comme

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r,$$

où $r = \|\vec{OP}\|$. En utilisant l'expression de \vec{e}_r dans la base $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, on obtient

$$\vec{OP} = r \sin \theta \cos \phi \vec{e}_x + r \sin \theta \sin \phi \vec{e}_y + r \cos \theta \vec{e}_z.$$

On a donc

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \phi \\ r \sin \theta \sin \phi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}.$$

c) On a

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z.$$

De l'expression de \overrightarrow{OP} en coordonnées sphériques, on a

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{r} \sin \theta \cos \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \theta \sin \phi \\ \dot{y} = \dot{r} \sin \theta \sin \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi \\ \dot{z} = \dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta \end{cases}$$

En insérant les expressions de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ en fonction de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$ dérivées à la question a), on peut déterminer les composantes de \vec{v} dans la base des coordonnées sphériques.

Selon \vec{e}_r :

$$\begin{aligned} & (\dot{r} \sin \theta \cos \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \sin \theta \cos \phi \\ & + (\dot{r} \sin \theta \sin \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \sin \theta \sin \phi \\ & + (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \cos \theta \\ & = \dot{r} \sin^2 \theta \cos^2 \phi + \cancel{r\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \cos^2 \phi} - \cancel{r\dot{\phi} \sin^2 \theta \sin \phi \cos \phi} \\ & + \dot{r} \sin^2 \theta \sin^2 \phi + \cancel{r\dot{\theta} \cos \theta \sin \theta \sin^2 \phi} + \cancel{r\dot{\phi} \sin^2 \theta \cos \phi \sin \phi} \\ & + \dot{r} \cos^2 \theta - \cancel{r\dot{\theta} \sin \theta \cos \theta} \\ & = \dot{r} \end{aligned} \tag{2}$$

Selon \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} & (\dot{r} \sin \theta \cos \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \cos \theta \cos \phi \\ & + (\dot{r} \sin \theta \sin \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \cos \theta \sin \phi \\ & - (\dot{r} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \sin \theta \\ & = \cancel{\dot{r} \sin \theta \cos \theta \cos^2 \phi} + r\dot{\theta} \cos^2 \theta \cos^2 \phi - \cancel{r\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \sin \phi \cos \phi} \\ & + \cancel{\dot{r} \sin \theta \cos \theta \sin^2 \phi} + r\dot{\theta} \cos^2 \theta \sin^2 \phi + \cancel{r\dot{\phi} \sin \theta \cos \theta \cos \phi \sin \phi} \\ & - \cancel{\dot{r} \cos \theta \sin \theta} + r\dot{\theta} \sin^2 \theta \\ & = r\dot{\theta} \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_ϕ :

$$\begin{aligned} & - (\dot{r} \sin \theta \cos \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi - r\dot{\phi} \sin \theta \sin \phi) \sin \phi \\ & + (\dot{r} \sin \theta \sin \phi + r\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi + r\dot{\phi} \sin \theta \cos \phi) \cos \phi \\ & = -\cancel{\dot{r} \sin \theta \cos \phi \sin \phi} - \cancel{r\dot{\theta} \cos \theta \cos \phi \sin \phi} + r\dot{\phi} \sin \theta \sin^2 \phi \\ & + \cancel{\dot{r} \sin \theta \sin \phi \cos \phi} + \cancel{r\dot{\theta} \cos \theta \sin \phi \cos \phi} + r\dot{\phi} \sin \theta \cos^2 \phi \\ & = r\dot{\phi} \sin \theta. \end{aligned}$$

On a donc

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + r\dot{\phi} \sin \theta \vec{e}_\phi.$$

d) On a

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2) \sin \theta \cos \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \cos \phi - (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \theta \sin \phi - 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \sin \phi \\ \ddot{y} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2) \sin \theta \sin \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\theta}) \cos \theta \sin \phi + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}) \sin \theta \cos \phi + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \cos \phi \\ \ddot{z} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \cos \theta - (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \sin \theta. \end{cases}$$

En utilisant l'expression de $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$, en fonction de $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\phi$, on obtient après quelques étapes de calculs :

Selon \vec{e}_r :

$$\begin{aligned} & \ddot{x} \sin \theta \cos \phi + \ddot{y} \sin \theta \sin \phi + \ddot{z} \cos \theta \\ &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_θ :

$$\begin{aligned} & \ddot{x} \cos \theta \cos \phi + \ddot{y} \cos \theta \sin \phi - \ddot{z} \sin \theta \\ &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

Selon \vec{e}_ϕ :

$$\begin{aligned} & -\ddot{x} \sin \phi + \ddot{y} \cos \phi \\ &= 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta \end{aligned}$$

e) Le même calcul s'applique aux coordonnées cylindriques. On a

$$\begin{cases} \vec{e}_x = \cos \phi \vec{e}_\rho - \sin \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_y = \sin \phi \vec{e}_\rho + \cos \phi \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

Le vecteur position est donné par

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z \\ \implies \vec{OP} &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos \phi \\ \rho \sin \phi \\ z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De cette expression, on obtient

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi \\ \dot{y} = \dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi \\ \dot{z} = \dot{z}. \end{cases}$$

En utilisant l'expression de \vec{e}_x, \vec{e}_y en fonction de $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\phi$, on a alors

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \left[(\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi) \cos \phi + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi) \sin \phi \right] \vec{e}_\rho \\ &+ \left[-(\dot{\rho} \cos \phi - \rho \dot{\phi} \sin \phi) \sin \phi + (\dot{\rho} \sin \phi + \rho \dot{\phi} \cos \phi) \cos \phi \right] \vec{e}_\phi \\ &+ \dot{z} \vec{e}_z. \end{aligned}$$

En simplifiant, on obtient

$$\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi + \dot{z} \vec{e}_z.$$

Les composantes de l'accélération sont données par :

$$\begin{cases} \ddot{x} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \cos \phi - (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \sin \phi \\ \ddot{y} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) \sin \phi + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi}) \cos \phi \\ \ddot{z} = \ddot{z}. \end{cases}$$

De la même manière que pour les coordonnées cylindriques, on obtient

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z \\ &= (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z. \end{aligned}$$

C Expression des contraintes : équation d'une surface

i) L'équation d'une sphère de rayon R centré à l'origine est donnée par :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \text{ (coordonnées cartésiennes)} \\ \rho^2 + z^2 &= R^2 \text{ (coordonnées cylindriques)} \\ r &= R \text{ (coordonnées sphériques)} \end{aligned}$$

ii) L'équation d'un cylindre de rayon R centré à l'origine de longueur L et parallèle à l'axe z est donnée par :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R^2, -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \text{ (coordonnées cartésiennes)} \\ \rho &= R, -\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2} \text{ (coordonnées cylindriques)} \\ r \sin \theta &= R, -\frac{L}{2} \leq r \cos \theta \leq \frac{L}{2} \text{ (coordonnées sphériques)} \end{aligned}$$

iii) L'équation d'un cône de révolution de hauteur h et de rayon R à sa base, dont l'axe est parallèle à l'axe z , ouvert vers les z positifs, et dont le sommet est placé à l'origine est donnée par :

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= \left(\frac{R}{h}\right)^2 z^2, 0 \leq z \leq h \text{ (coordonnées cartésiennes)} \\ \rho &= \frac{R}{h}z, 0 \leq z \leq h \text{ (coordonnées cylindriques)} \\ \tan \theta &= \frac{R}{h}, 0 \leq r \leq \sqrt{h^2 + R^2} \text{ (coordonnées sphériques)} \end{aligned}$$

Problèmes

1 Spirale

Le point P parcourt la spirale ci-contre en partant de l'origine en $t = 0$, à vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\phi}$. Le rayon de la spirale s'accroît linéairement dans le temps.

- a) $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = \rho \hat{e}_\rho$ par définition des coordonnées cylindriques.
- b) Puisqu'on indique que ρ est proportionnel au temps, et que l'angle augmente aussi linéairement dans le temps, $\phi = \omega t$, il s'en suit que $\rho = \lambda \omega t$ où on a introduit une constante λ ayant la dimension d'une longueur [m] (car ϕ est sans dimension).
- c) De façon générale on rappelle que $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\hat{e}}_\rho = \dot{\rho} \hat{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \hat{e}_\phi$.
Ensuite, on peut substituer $\rho = \lambda \omega t$ et $\dot{\phi} = \omega$ pour aboutir à

$$v_\rho = \lambda \omega$$

$$v_\phi = \lambda \omega^2 t$$

- d) Pour les composantes de l'accélération :

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 = -\lambda \omega^3 t$$

$$a_\phi = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = 2\lambda\omega^2$$

Remarque : il pourrait être tentant d'identifier a_ρ à l'accélération centripète et a_ϕ à l'accélération tangentielle, mais ce n'est pas le cas car le cercle tangent à la trajectoire n'est pas centré à l'origine du repère (on le voit bien au tout début de la trajectoire).

2 Point sur un cylindre

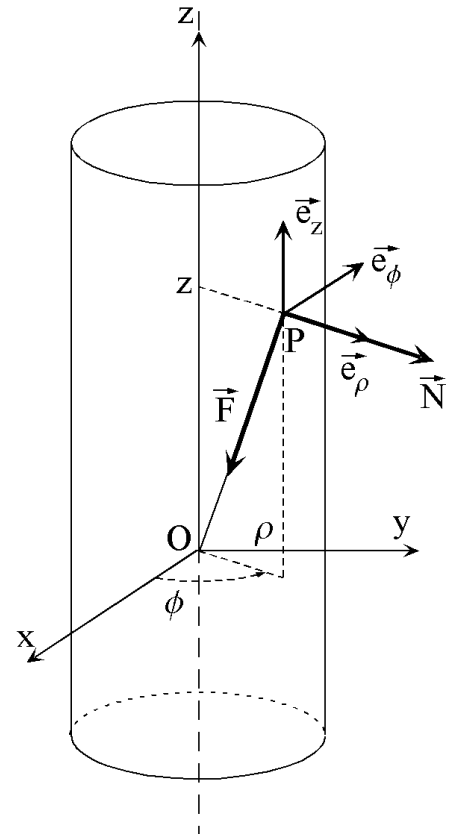
Marche à suivre

Pour résoudre ce type de problèmes à contraintes, il est conseillé de :

- Choisir un système de coordonnées adapté à la résolution du problème, typiquement des coordonnées cartésiennes (en une, deux ou trois dimensions), polaires (en deux dimensions), cylindriques ou sphériques (en trois dimensions).
- Ecrire les contraintes qui s'appliquent sur le point matériel.
- Ecrire les forces qui s'appliquent sur le point matériel.
- Ecrire les équations du mouvement en partant de l'équation de Newton $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$ que l'on projette sur les trois axes.
- Eventuellement résoudre ces équations pour les variables considérées ($x, y, z, \phi, \theta, \rho, \dots$), si cela est demandé.

a) En suivant la méthode de résolution, on commence par définir le système (le point matériel) et on fait le dessin ci-contre. L'évolution du système est étudiée dans un référentiel dans lequel le cylindre est fixe.

- Coordonnées : le point matériel étant contraint à se déplacer sur un cylindre, sa distance à l'axe est constante. Il est donc logique de choisir un repère $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques pour laquelle la coordonnée ρ sera constante.
- Contraintes : Le point matériel doit se déplacer sur le cylindre. On a donc $\rho = R = \text{constante}$.
- Forces : Deux forces s'exercent sur le point matériel :
 - La première est la réaction \vec{N} du cylindre, qui maintient le point matériel sur le cylindre. Elle est toujours perpendiculaire à la surface du cylindre, autrement dit colinéaire à \hat{e}_ρ . On peut écrire $\vec{N} = N_\rho \hat{e}_\rho$ où N_ρ est la composante radiale de cette réaction. On ne connaît pas *a priori* le signe de N_ρ . Sur le dessin, on a choisi arbitrairement $N_\rho > 0$ mais les équations que nous allons dériver ci-dessous sont valables dans tous les cas.
 - La deuxième force est celle qui attire le point P vers un point O sur l'axe du cylindre et qui est proportionnelle à la distance entre O et P. Si on définit le vecteur $\vec{r} = \vec{OP}$ on a $\vec{F} = -k\vec{r} = -k(R\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z)$.



b) Equation du mouvement : l'équation de Newton sous forme vectorielle s'écrit

$$\vec{F} + \vec{N} = m\vec{a} \quad (3)$$

Or, en coordonnées cylindriques, nous savons que l'accélération s'écrit \vec{a} (voir cours) :

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (4)$$

En introduisant la contrainte $\rho = R$, l'équation précédente se simplifie en :

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (5)$$

Nous projetons l'équation du mouvement (3) sur les axes :

$$\text{Sur } \hat{e}_\rho : \quad -mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - kR, \quad (6)$$

$$\text{Sur } \hat{e}_\phi : \quad mR\ddot{\phi} = 0, \quad (7)$$

$$\text{Sur } \hat{e}_z : \quad m\ddot{z} = -kz. \quad (8)$$

c) Pour décrire le mouvement du point matériel, examinons les équations du mouvement trouvées au point b). Le mouvement du point matériel dans la direction \hat{e}_z est directement interprétable. On a obtenu $m\ddot{z} = -kz$. On reconnaît l'équation de l'oscillateur harmonique à une dimension. La position selon z au cours du temps est donc de la forme $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi_0)$ où $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Sur \hat{e}_ϕ , l'équation est $mR\ddot{\phi} = 0$. Il suffit de l'intégrer une fois pour obtenir $\dot{\phi} = \text{cte}$. La vitesse angulaire du point autour de l'axe du cylindre (appelons la ω_1 , qui dépend des conditions initiales) est constante, la projection sur \hat{e}_ϕ décrit donc un mouvement circulaire uniforme.

Le mouvement du point est donc la combinaison d'un mouvement oscillatoire harmonique parallèle à l'axe z et d'un mouvement circulaire uniforme de vitesse angulaire ω_1 autour de l'axe du cylindre.

d) On utilise la projection de l'équation du mouvement sur \hat{e}_ρ pour trouver la valeur de N_ρ . On a trouvé

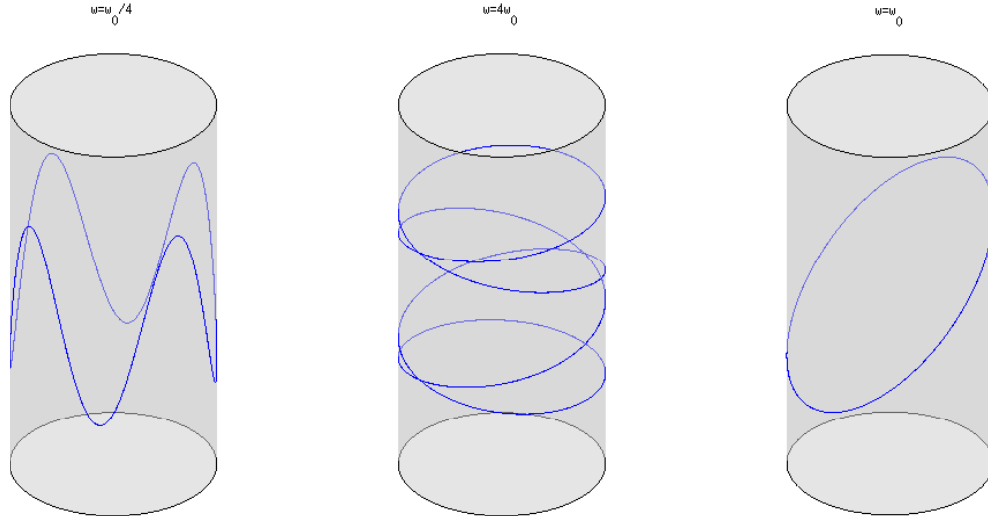
$$-mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - kR \quad (9)$$

donc

$$N_\rho = kR - mR\omega_1^2 = mR\left(\frac{k}{m} - \omega_1^2\right) = mR(\omega_0^2 - \omega_1^2) = \text{cte}. \quad (10)$$

La composante radiale (et donc la norme) de la force de liaison qui s'exerce sur le point est donc constante. On rappelle que la force est toujours perpendiculaire à la surface du cylindre. Examinons son sens en fonction des conditions initiales, c'est-à-dire des valeurs de ω_1 . On distingue 3 cas, illustrés sur les figures ci-dessous.

- Si $\omega_1 > \omega_0$, on a $N_\rho < 0$. \vec{N} est donc dans le sens opposé à \hat{e}_ρ , c'est-à-dire dirigé vers l'intérieur. Dans ce cas, le point tourne vite autour de l'axe du cylindre. Il faut que \vec{N} soit dirigé vers l'intérieur pour éviter que le point ne "s'échappe".
- Si $\omega_1 < \omega_0$, on a $N_\rho > 0$. \vec{N} est donc dans le même sens que \hat{e}_ρ , c'est à dire dirigé vers l'extérieur. Dans ce cas, le point tourne lentement autour de l'axe du cylindre. Il faut que \vec{N} soit dirigé dans le sens opposé à \vec{F} , sans quoi le point "tomberait" sur le point O .
- Le cas où $\omega_1 = \omega_0$ est le plus intéressant. C'est le cas où le temps que met le point pour faire une fois le tour du cylindre est le même que le temps pour faire une oscillation parallèle à l'axe z . Dans ce cas, on a $N = 0$, aucune force de liaison ne s'applique sur le point. On pourrait donc enlever le cylindre sans que la trajectoire du point soit modifiée. On peut aussi noter que dans ce cas-là, la seule force qui s'applique sur le point est la force qui attire le point vers le centre du cylindre $\vec{F} = -k\vec{r}$. La trajectoire est alors une ellipse dans un plan contenant l'origine (voir problème 1 de la série 3).



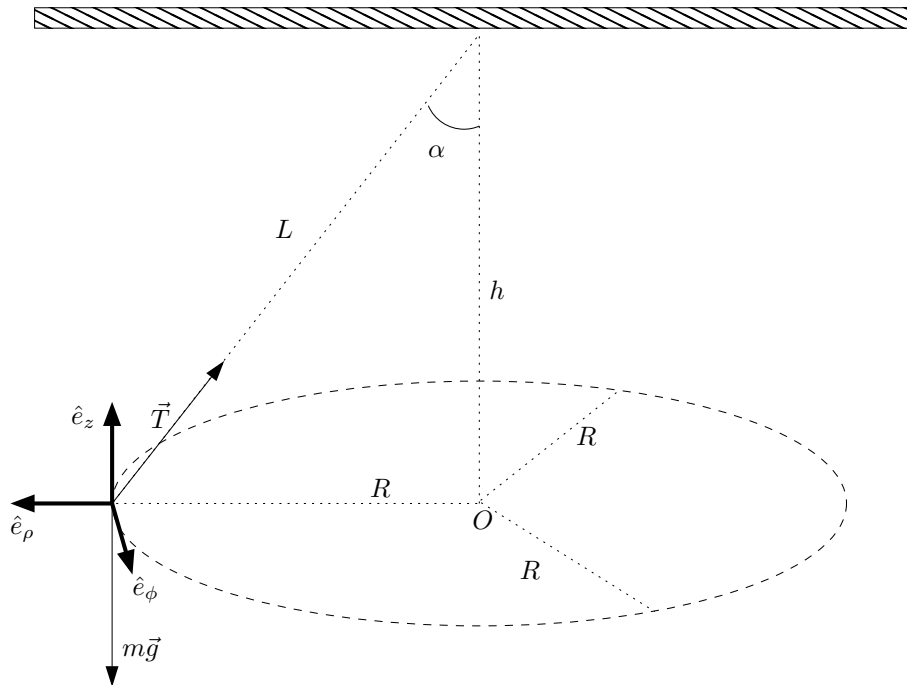
3 Araignée physicienne

Le système considéré est l'araignée, considérée comme un point matériel de masse m , et le référentiel est le plafond. On part comme d'habitude de l'équation de Newton sous sa forme vectorielle $\Sigma \vec{F} = m\vec{a}$. Les forces qui s'appliquent sur l'araignée sont son poids et la tension du fil \vec{T} . On a

$$\vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a} \quad (11)$$

Pour résoudre ce problème, il est pratique d'utiliser un repère $(\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi, \hat{e}_z)$ associé aux coordonnées cylindriques avec le centre du cercle comme origine. Dans ce cas, l'accélération s'écrit (cf. cours)

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{e}_\phi + \ddot{z}\hat{e}_z. \quad (12)$$



Mais l'araignée subit les contraintes suivantes

- Elle tourne en rond à vitesse constante : $\dot{\phi} = cte = \omega$ et $\ddot{\phi} = 0$.

- Elle reste toujours à la même distance du plafond : $z = 0$, et $\dot{z} = \ddot{z} = 0$.
- Elle reste toujours à la même distance de son axe de rotation : $\rho = R = cte$ donc $\dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$.

L'accélération devient

$$\vec{a} = -R\omega^2 \hat{e}_\rho. \quad (13)$$

Remarque : Sachant que $\frac{|\vec{v}|}{R} = |\vec{\omega}|$, cette équation nous redonne la relation bien connue pour un mouvement circulaire uniforme $|\vec{a}| = a_n = \frac{v^2}{R}$.

La deuxième équation de Newton projetée sur les axes nous donne :

- Sur \hat{e}_ρ : $-T \sin \alpha = -mR\omega^2$.
- Sur \hat{e}_ϕ : $0 = 0$.
- Sur \hat{e}_z : $T \cos \alpha - mg = 0$.

En divisant membre à membre les équations obtenues pour les projections sur \hat{e}_ρ et \hat{e}_z , on obtient :

$$-\tan \alpha = \frac{-R\omega^2}{g} \Rightarrow R\omega^2 = g \tan \alpha. \quad (14)$$

Finalement, en introduisant le relation trigonométrique $R = h \tan \alpha$, on obtient

$$h \tan \alpha \omega^2 = g \tan \alpha \Rightarrow \omega^2 = \frac{g \tan \alpha}{h \tan \alpha} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{h}}. \quad (15)$$

Si l'araignée n'avait pas tourné en rond, mais s'était simplement laissée balancer au bout du fil (« pendule mathématique »), on aurait obtenu une pulsation $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ et donc une période $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ plus grande que $2\pi\sqrt{\frac{h}{g}}$, puisque $L > h$.

Remarque : on peut aussi résoudre le problème de manière similaire en utilisant les coordonnées sphériques, avec l'origine O au point d'attache du fil au plafond, et l'axe z de référence pour l'angle polaire θ vers le bas.

- Contraintes : $r = cte = L$, donc $\ddot{r} = \dot{r} = 0$, et $\theta = \alpha = cte$ et $\dot{\phi} = \omega = cte$.
- L'accélération en coordonnées sphériques s'écrit :

$$\vec{a} = (-L\omega^2 \sin^2 \alpha) \hat{e}_r + (-L\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha) \hat{e}_\theta + 0 \hat{e}_\phi.$$

- La projection de la deuxième loi de Newton donne
 - sur \hat{e}_r : $-mL\omega^2 \sin^2 \alpha = -T + mg \cos \theta$
 - sur \hat{e}_θ : $-mL\omega^2 \cos \alpha \sin \alpha = -mg \sin \alpha$
- En remarquant que $h = L \cos \alpha$, on trouve de suite avec la deuxième équation $\omega^2 = g/h$.

4 Pendule sur une porte

- Dessin : voir ci-dessous
- Coordonnées : les coordonnées les plus appropriées pour décrire ce problème sont les coordonnées sphériques $(\hat{e}_r, \hat{e}_\theta, \hat{e}_\phi)$. Ce sont les coordonnées qui décrivent respectivement la longueur du fil, l'angle du fil et l'angle de la porte.
- Contraintes : la longueur du fil est constante, on a $r = cte = L$ et donc $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. La porte tourne à vitesse constante, on a $\dot{\phi} = cte = \omega$ et donc $\ddot{\phi} = 0$.

a) Forces qui s'appliquent sur le point matériel :

- le poids $m\vec{g} = -mg \cos \theta \hat{e}_r + mg \sin \theta \hat{e}_\theta$.
- la tension du fil $\vec{T} = T_r \hat{e}_r$, la configuration est telle que T_r est toujours négatif.
- La force de contrainte de la porte $\vec{N} = N_\phi \hat{e}_\phi$.

Pour obtenir les équations du mouvement, on utilise la deuxième loi de Newton : $\vec{N} + \vec{T} + m\vec{g} = m\vec{a}$. En coordonnées sphériques, avec les contraintes citées ci-dessus, l'accélération s'écrit :

$$\vec{a} = \left(-L\ddot{\theta}^2 - L\omega^2 \sin^2 \theta\right) \hat{e}_r + \left(L\ddot{\theta} - L\omega^2 \sin \theta \cos \theta\right) \hat{e}_\theta + 2L\omega\dot{\theta} \cos \theta \hat{e}_\phi. \quad (16)$$

On peut projeter l'équation sur les 3 axes :

- Sur \hat{e}_r : $T_r - mg \cos \theta = -mL\ddot{\theta}^2 - mL\omega^2 \sin^2 \theta$.
- Sur \hat{e}_θ : $mg \sin \theta = mL\ddot{\theta} - mL\omega^2 \sin \theta \cos \theta$.
- Sur \hat{e}_ϕ : $N_\phi = 2mL\dot{\theta}\omega \cos \theta$.

b) Quand $\omega \rightarrow 0$, on obtient l'équation $mg \sin \theta = mL\ddot{\theta}$, qui redonne l'équation du pendule vue dans le cours en faisant le changement de variable $\alpha = \pi - \theta$: $\ddot{\alpha} = -\frac{g}{L} \sin \alpha$.

Quand $L \rightarrow 0$, on obtient à partir de la projection de l'équation du mouvement sur \hat{e}_θ que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$. Pour le cas $\theta = 0$, on trouve $T_r = mg$ et pour $\theta = \pi$, on trouve $T_r = -mg$. Dans les deux cas, le vecteur \vec{T} est dirigé vers le haut, ce qui est bien ce à quoi on s'attend, car \vec{T} doit s'opposer au poids.

