Corrigé 03 : Cinématique

Rappel : Il est nécessaire d'avoir maîtrisé les concepts de produit scalaire, produit vectoriel, projection de vecteurs, repères directs, avant de faire cette série ; cf. série 1.

Exercices d'introduction

A Vecteurs position, vitesse et accélération

On raisonne à partir des définitions des vecteurs position, vitesse et accélération. Le vecteur position indique la position de l'objet à partir de l'origine choisie. Le vecteur vitesse (dérivée du vecteur position par rapport au temps) indique le sens du mouvement et sa norme est la valeur absolue de la vitesse scalaire. Elle est tangente à la trajectoire. L'accélération (dérivée du vecteur vitesse par rapport au temps) peut avoir des composantes tangentielle et normale. Elle est toujours dirigée vers « l'intérieur » du virage.

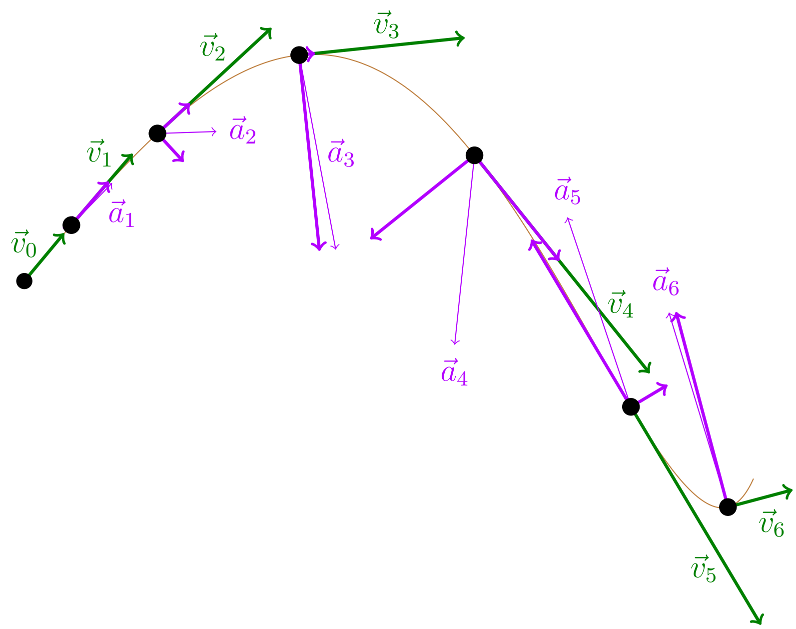
Ainsi, les vecteurs $\vec{v}$, $\vec{a}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas réalistes :

- La vitesse $\vec{v}$ doit être tangente à la trajectoire ;
- l'accélération $\vec{a}_1$ doit être dirigée vers « l'intérieur » du virage ;
- la vitesse $\vec{v}_2$ doit être tangente à la trajectoire.

B Vecteurs vitesse et accélération

Pour visualiser les vecteurs vitesse et accélération, il faut imaginer le mouvement de l'objet :

- On peut comparer les normes des différents vecteurs vitesse en se basant sur les distances parcourues en une seconde par l'objet. On en déduit par exemple que la norme de la vitesse est plus grande à l'instant $t = 4\,\text{s}$ qu'à l'instant $t = 6\,\text{s}$.
- Les changements dans la norme de la vitesse permettent d'approximer la composante de l'accélération tangente à la trajectoire. On obtient ainsi par exemple que l'accélération tangentielle doit être dirigée vers l'arrière à l'instant $t = 5\,\text{s}$.
  La composante de l'accélération normale à la trajectoire est absente (lorsque l'objet se déplace en ligne droite) ou dirigée vers l'intérieur du virage.
  Le vecteur accélération est la somme des vecteurs accélérations tangentielle et normale : $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$.



C Formule de Poisson pour la dérivation de vecteurs de base

a) Pour un vecteur arbitraire $\vec{r} = x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}$ on peut écrire :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

b) On écrit explicitement le produit vectoriel $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$ terme par terme :

$$\begin{aligned} &\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega\vec{e_z} \wedge (x\vec{e_x} + y\vec{e_y} + z\vec{e_z}) \\ \Longrightarrow\ &\vec{\omega} \wedge \vec{r} = \omega x\vec{e_y} - \omega y\vec{e_x} \end{aligned}$$

c) Nous pouvons utiliser :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}\vec{e_x} + \frac{d\vec{y}}{dt}\vec{e_y} + \frac{d\vec{z}}{dt}\vec{e_z}$$

pour construire le système d'équations différentielles suivant, en identifiant les composantes du résultat de notre calcul explicite précédent de $\vec{\omega} \wedge \vec{r}$:

$$\begin{cases} \frac{d\vec{x}}{dt} = -\omega y \\ \frac{d\vec{y}}{dt} = \omega x \\ \frac{d\vec{z}}{dt} = 0 \end{cases}$$

d) Nous pouvons utiliser :

$$\frac{d\cos(\omega t)}{dt} = -\omega\sin(\omega t)$$

et :

$$\frac{d\sin(\omega t)}{dt} = \omega\cos(\omega t)$$

Pour identifier que c'est bel et bien la solution à notre système d'équations.

$$\begin{cases} x = \rho\cos(wt) \\ y = \rho\sin(wt) \\ z = \text{cste} \end{cases}$$

d) Les expressions trouvées pour x et y sont bien celles décrivant un mouvement circulaire de rayon ρ dans le plan (x, y) (donc autour de l'axe z), de fréquence angulaire (ou pulsation) ω.

D Rotation d'un cube

a) Nous savons que la rotation des points A, B, C se fait autour de O et est décrite par $\vec{\omega} = \text{cst}$.
Nous pouvons donc déterminer les vitesses des points en calculant :

$$\vec{v_M} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM} \ , \ M \in \{A, B, C\}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \vec{v_A} &= \vec{\omega} \wedge \vec{OA} && (1) \\ &= (\omega_x \vec{e_x} + \omega_y \vec{e_y} + \omega_z \vec{e_z}) \wedge (a\ \vec{e_x}) && (2) \\ &= \omega_z a\ \vec{e_y} - \omega_y a\ \vec{e_z} && (3) \end{aligned}$$

où nous avons développé l'avant-dernière ligne et utilisé : $\vec{e_x} \wedge \vec{e_x} = 0$, $\vec{e_y} \wedge \vec{e_x} = -\vec{e_z}$ et $\vec{e_z} \wedge \vec{e_x} = \vec{e_y}$.
Similairement pour $\vec{v_B}$, nous pouvons reprendre le résultat trouvé en (3) et ajouter la composante de la vitesse due à la nouvelle coordonnée :

$$\begin{aligned} \vec{v_B} &= \vec{\omega} \wedge \vec{OB} = \vec{\omega} \wedge (a\ \vec{e_x} + a\ \vec{e_z}) && (4) \\ &= \vec{v_A} + (\omega_x \vec{e_x} + \omega_y \vec{e_y} + \omega_z \vec{e_z}) \wedge (a\ \vec{e_z}) && (5) \\ &= \vec{v_A} + (a\ \omega_y \vec{e_x} - a\ \omega_x \vec{e_y}) && (6) \\ &= a\omega_y \vec{e_x} + a(\omega_z - \omega_x)\vec{e_y} - a\omega_y \vec{e_z} && (7) \end{aligned}$$

Même méthode pour $\vec{v_C}$:

$$\begin{aligned} & \vec{v_C} = \vec{v_B} + (\omega_x \vec{e_x} + \omega_y \vec{e_y} + \omega_z \vec{e_z}) \wedge (a\ \vec{e_y}) && (8) \\ \Longrightarrow\ & \vec{v_C} = \vec{v_B} + (-a\ \omega_z \vec{e_x} + a\ \omega_x \vec{e_z}) && (9) \end{aligned}$$

On peut également juste calculer les produits vectoriels directement :

$$\vec{v_A} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_z \\ -\omega_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_B} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \omega_y \\ \omega_z - \omega_x \\ -\omega_y \end{pmatrix}$$

$$\vec{v_C} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \omega_y - \omega_z \\ \omega_z - \omega_x \\ \omega_x - \omega_y \end{pmatrix}$$

Similairement, pour calculer les accélérations des points, nous pouvons utiliser la définition : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$:

$$\begin{aligned}
\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} &= \frac{d(\vec{\omega} \wedge \vec{OM})}{dt} && (10)\\
&= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \dot{\vec{OM}} && (11)\\
&= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge \vec{v} && (12)\\
&= \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OM} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM}) && (13)
\end{aligned}$$

Dans le cas où $\vec{\omega}$ ne dépend pas du temps, (13) devient simplement : $\vec{a} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OM})$, que nous calculons de la même façon que précédemment.
Pour le point A :

$$\begin{aligned}
&\vec{a_A} = \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OA}) && (14)\\
\implies &\vec{a_A} = (\omega_x \vec{e_x} + \omega_y \vec{e_y} + \omega_z \vec{e_z}) \wedge (\omega_z a\ \vec{e_y} - \omega_y a\ \vec{e_z}) &&\\
\implies &\vec{a_A} = (-a\omega_y^2 - a\omega_z^2)\vec{e_x} + (a\omega_x\omega_y)\vec{e_y} + (a\omega_x\omega_z)\vec{e_z} && (15)
\end{aligned}$$

Similairement au calcul des vitesses, nous pouvons reprendre le résultat trouvé pour A et y ajouter uniquement les composantes de l'accélération dues aux composantes de vitesse non prises en compte pour le calcul de a_A. Pour B il s'agit de $\omega_y \vec{e_x} - \omega_x \vec{e_y}$.
Donc pour B :

$$\vec{a_B} = (a\omega_x\omega_z - a\omega_y^2 - a\omega_z^2)\vec{e_x} + (a\omega_x\omega_y + a\omega_y\omega_z)\vec{e_y} + (a\omega_x\omega_z - a\omega_y^2 - a\omega_x^2)\vec{e_z} \quad (16)$$

Et donc pour C :

$$\begin{aligned}
\vec{a_C} = &(a\omega_x\omega_y + a\omega_x\omega_z - a\omega_y^2 - a\omega_z^2)\vec{e_x}\ + \\
&(a\omega_x\omega_y + a\omega_y\omega_z - a\omega_x^2 - a\omega_z^2)\vec{e_y}\ + \\
&(a\omega_x\omega_z + a\omega_y\omega_z - a\omega_y^2 - a\omega_x^2)\vec{e_z}
\end{aligned} \quad (17)$$

b) Nous allons maintenant admettre que $\vec{\omega}(t)$ est fonction du temps. Rien ne change au fait que :

$$\vec{v_M} = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}\ ,\ M \in \{A, B, C\}$$

Car nous sommes toujours en train de décrire un mouvement circulaire.
Il est donc clair que les expressions des vitesses restent les mêmes que celles trouvées dans la question (a), en prenant juste en compte la dépendance au temps de : $\vec{\omega}(t) = \omega_x(t)\vec{e_x} + \omega_y(t)\vec{e_y} + \omega_z(t)\vec{e_z}$
Pour le calcul des accélérations, nous pouvons reprendre l'expression trouvée en (13), et voir que nous devons uniquement calculer le terme $\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OM}$ pour trouver l'expression totale de l'accélération. Dans ce cas spécifique, nous n'avons aucune définition explicite pour $\vec{\omega}(t)$, et le repère $\{O, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z}\}$ est un repère fixe.
Donc :

$$\dot{\vec{\omega}}(t) = \dot{\omega}_x(t)\vec{e_x} + \dot{\omega}_y(t)\vec{e_y} + \dot{\omega}_z(t)\vec{e_z} \quad (18)$$

Il en découle donc que :

$$\begin{cases} \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OA} &= \dot{\omega}_z a \ \vec{e_y} - \dot{\omega}_y a \ \vec{e_z} \\ \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OB} &= (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OA}) + (a \ \dot{\omega}_y \vec{e_x} - a \ \dot{\omega}_x \vec{e_y}) \\ \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OC} &= (\dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OB}) + (-a \ \dot{\omega}_z \vec{e_x} + a \ \dot{\omega}_x \vec{e_z}) \end{cases} \tag{19}$$

Qui peut être écrit comme :

$$\begin{cases} \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OA} &= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 0 \\ \dot{\omega}_z \\ -\dot{\omega}_y \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OB} &= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_x \\ -\dot{\omega}_y \end{pmatrix} \\ \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{OC} &= \begin{pmatrix} \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_y \\ \dot{\omega}_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a \\ a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} \dot{\omega}_y - \dot{\omega}_z \\ \dot{\omega}_z - \dot{\omega}_x \\ \dot{\omega}_x - \dot{\omega}_y \end{pmatrix} \end{cases} \tag{20}$$

L'accélération totale est donc la somme du résultat trouvé en (20) et (15), (16), (17).

E Looping

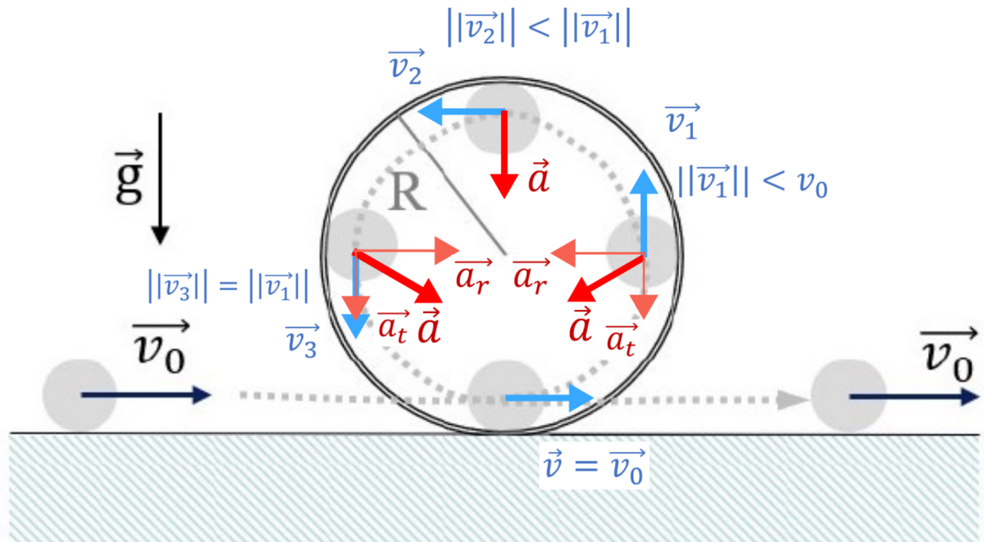


FIGURE 1 – Noter que la norme des vecteurs sur ce schéma est purement indicative, et ne représente pas leur vrai valeur.

La bille va suivre un mouvement circulaire à l'intérieur de l'anneau. On en déduit que **les vecteurs vitesse sont en tout point tangents** à la trajectoire circulaire. Les normes des vecteurs vitesse dépendent de la position de la bille dans sa trajectoire, et la vitesse sera minimale au sommet de la trajectoire. Ceci deviendra plus évident avec l'introduction de la conservation d'énergie mécanique dans les chapitres à venir.

L'accélération totale sera en tout point la somme de la pesanteur et de l'accélération due à la réaction support. Celle-ci est toujours dirigée vers le centre du looping, **car la bille suit une trajectoire circulaire**. Au sommet de la trajectoire, les deux accélérations sont colinéaires, et aux extrémités droite et gauche, la pesanteur est purement tangentielle.

1 Accélération dans un virage

a) Selon l'abscisse curviligne, la distance parcourue sur un quart de cercle est $D = \pi R/2$, et l'accélération a_t sur cette distance est constante. En tenant compte de la vitesse initiale nulle, et en choisissant l'origine de l'abscisse curviligne s au point de départ du véhicule, l'équation horaire est

$$s(t) = \frac{1}{2} a_\mathrm{t} t^2 \,. \tag{21}$$

On en déduit que l'accélération tangentielle vaut

$$a_\mathrm{t} = 2\frac{D}{T^2} = \frac{\pi R}{T^2} \,. \tag{22}$$

b) L'évolution temporelle de la vitesse est

$$v(t) = a_\mathrm{t} t \,, \tag{23}$$

d'où l'on trouve que après un quart de tour, la vitesse vaut

$$v(T) = a_\mathrm{t} T = \frac{\pi R}{T} \,. \tag{24}$$

c) L'accélération normale est égale au rapport du carré de la vitesse et du rayon du cercle. Donc après un quart de tour

$$a_\mathrm{n} = \frac{v^2(T)}{R} = \frac{\pi^2 R}{T^2} \,. \tag{25}$$

d) L'évolution temporelle de l'accélération normale est

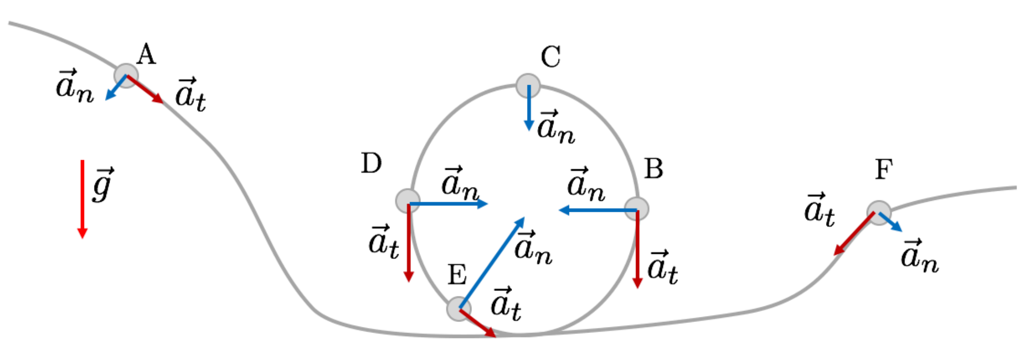
$$a_\mathrm{n}(t) = \frac{v^2(t)}{R} = \frac{a_\mathrm{t}^2 t^2}{R} \,. \tag{26}$$

Pour que cette expression soit égale à l'accélération tangentielle, il faut que

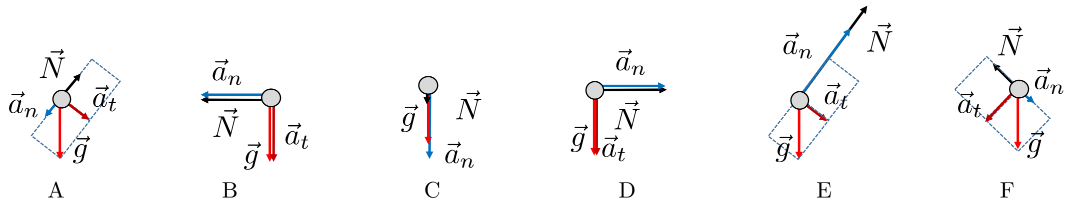
$$a_\mathrm{n}(t_\mathrm{eq}) = \frac{a_\mathrm{t}^2 t_\mathrm{eq}^2}{R} = a_\mathrm{t} \qquad \Rightarrow \qquad t_\mathrm{eq}^2 = \frac{R}{a_\mathrm{t}} = \frac{T^2}{\pi} \qquad \Rightarrow \qquad t_\mathrm{eq} = \frac{T}{\sqrt{\pi}} \tag{27}$$

2 Roller Coaster

1. La figure ci-dessous donne les vecteurs accélérations normales $\vec{a}_n$ et tangentielles $\vec{a}_t$ du wagonnet allant de A à F lorsque la trajectoire est dans un plan vertical.



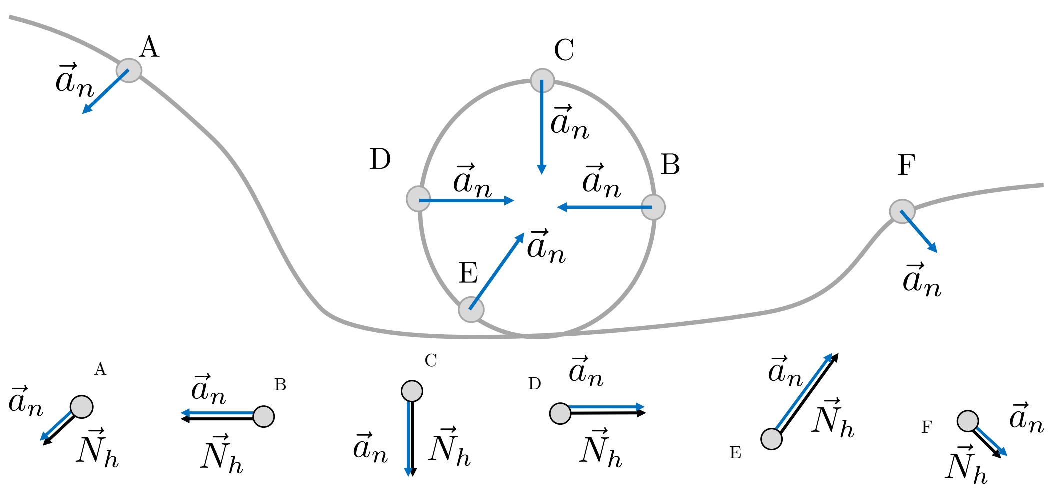
La figure suivante permet d'analyser la situation point par point. Le vecteur $\vec{N}$ représente la force liée à la contrainte géométrique et $\vec{g}$ est l'accélération due à l'attraction terrestre. On a considéré une masse m unité. Le rectangle qui apparaît pour certains points correspond à la décomposition du vecteur $\vec{g}$ en ses composantes normales et tangentielles au mouvement.



Le wagonnet subit deux forces : son poids $m\vec{g}$ et la force de liaison $\vec{N}$, donc $m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, c'est-à-dire $\vec{a} = \vec{g} + \vec{N}/m$.

Rappelons que $\vec{a}_t$ et $\vec{a}_n$ sont les composantes de $\vec{a}$ parallèle et perpendiculaire à la vitesse ; et aussi que $\vec{a}_n$ est dirigé vers le centre de courbure avec une norme égale à v^2/R et que $\vec{a}_t = dv/dt\ \vec{v}/v$, où v est la norme de la vitesse.

2. Lorsque le wagonnet se déplace de F à A les accélérations sont identiques à celles qui caractérisent son déplacement de A à F (pour autant que la vitesse initiale du mouvement de F à A soit un vecteur opposé à la vitesse finale du mouvement de A à F).
3. Dans le cas d'une piste se trouvant dans un plan horizontal, l'accélération tangentielle est nulle car $m\vec{g}$ et $\vec{N}$ sont tous deux perpendiculaires à la piste. C'est la composante horizontale N_h de $\vec{N}$ qui cause l'accélération normale (voir les figures ci-dessous). La norme de la vitesse est constante, et donc a_n a une norme inversement proportionnelle au rayon de courbure ; ceci explique pourquoi la norme de a_n est la même aux points B, C, D et E.



3 Trajectoire elliptique

a) Le vecteur position du point matériel est

$$\vec{r}(t) = C_1 \cos(\omega t)\hat{e}_x + C_2 \sin(\omega t)\hat{e}_y. \tag{28}$$

On reconnaît l'équation d'une ellipse centrée à l'origine et de demi-axes C_1 et C_2 selon les directions x et y centrée sur l'origine O. En effet, les coordonnées x et y du vecteur $\vec{r}$ satisfont l'équation

$$\frac{x^2}{C_1^2} + \frac{y^2}{C_2^2} = 1$$

qui est l'équation d'une ellipse de demi-axes C_1 et C_2. L'équation (28) représente l'équation horaire d'un point matériel se déplaçant sur cette ellipse.

b) Le vecteur vitesse est donné par

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega C_1 \sin(\omega t)\hat{e}_x + \omega C_2 \cos(\omega t)\hat{e}_y.$$

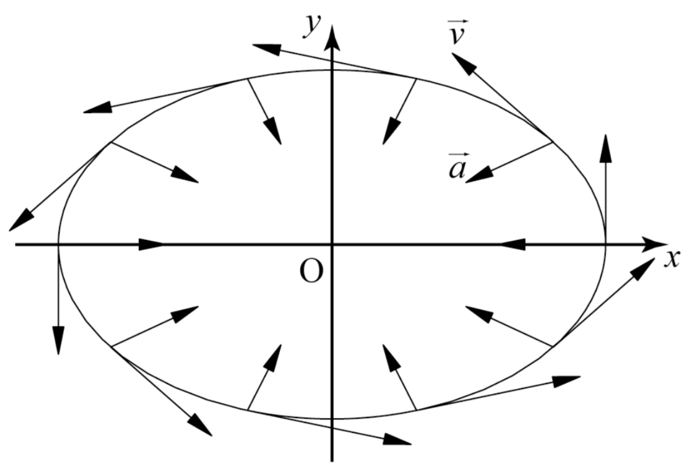
Il est toujours tangent à la trajectoire (c'est-à-dire à l'ellipse).
Le vecteur accélération est donné par

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 C_1 \cos(\omega t)\hat{e}_x - \omega^2 C_2 \sin(\omega t)\hat{e}_y. \tag{29}$$

Ce dernier peut se ré-écrire

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \vec{r}(t).$$

Il s'agit d'un vecteur colinéaire à $\vec{r}(t)$, dirigé dans le sens opposé. Il pointe donc vers l'origine O du repère. (Voir schéma).



Pour montrer que $\vec{r}(t)$ n'est en général pas orthogonal à $\vec{v}(t)$, on calcule leur produit scalaire :

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = -C_1^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) + C_2^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t) = (C_2^2 - C_1^2)\omega \sin(\omega t)\cos(\omega t).$$

Cette expression n'est pas nulle si $C_1 \neq C_2$ (sauf dans les cas particuliers $\omega t = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$), et donc les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{v}$ ne sont en général pas orthogonaux.

c) Pour écrire la force qui détermine ce mouvement, on utilise la loi de Newton

$$\vec{F} = m\vec{a}(t) = -m\omega^2 \vec{r}(t) \tag{30}$$

d) D'après l'équation (30), cette force est proportionelle à la distance à l'origine $|\vec{r}(t)|$, parallèle au vecteur $\vec{r}(t)$ et de sens opposé. Il s'agit d'une force de rappel, telle celle produite par un ressort de longueur au repos nulle dont une extremité est fixée à l'origine et l'autre sur le point matériel, comme nous le verrons en détail en semaine 4. La force gravitationnelle est, elle, inversément proportionelle au carré de la distance. Il est à noter que les deux forces produisent un mouvement elliptique. Dans cet exercice, la force est dirigée vers le centre de l'ellipse. Dans le cas de la gravitation (mouvement des planètes, par exemple), il sera vu que la force est dirigée vers l'un des foyers de l'ellipse.

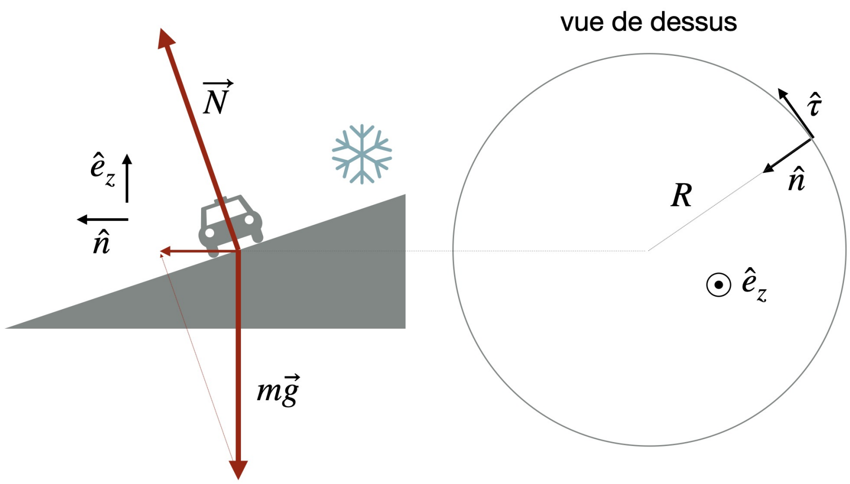
4 Virage relevé verglacé

a) On considère le mouvement d'un point matériel de masse m représentant le centre de masse de la voiture. Le référentiel est lié au sol, il est galiléen pour cette situation. Il faut tout d'abord identifier deux caractéristiques essentielles :

— Puisque la route est verglacée, la seule force de contact entre la route et la voiture est la force de liaison $\vec{N}$ normale à la chaussée.

— Lorsque la hauteur de la voiture ne change pas, le mouvement est circulaire uniforme (vitesse constante v_0) dans un plan horizontal (et donc pas parallèle à la chaussée)

Nous pouvons alors faire le schéma ci-dessous représentant notamment le bilan des forces ($\vec{N}$ et $m\vec{g}$) et 3 vecteurs unitaires formant une base orthonormée $(\hat{\tau}, \hat{n}, \hat{e}_z)$:



On projette d'abord le PFD, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, sur le vecteur unitaire normal $\hat{n}$:

$$m\vec{a} \cdot \hat{n} = m\vec{g} \cdot \hat{n} + \vec{N} \cdot \hat{n} \tag{31}$$

$$\Longrightarrow \quad m\frac{v_0^2}{R} = N \sin\alpha \tag{32}$$

En projetant d'autre part sur $\hat{e}_z$:

$$m\vec{a} \cdot \hat{e}_z = m\vec{g} \cdot \hat{e}_z + \vec{N} \cdot \hat{e}_z \tag{33}$$

$$\Longrightarrow \quad 0 = -mg + N\cos\alpha \tag{34}$$

Si l'on divise l'équation (32) par (34) afin d'élimer la force inconnue $\vec{N}$ on obtient

$$\frac{v_0^2}{R\,g} = \tan\alpha \quad \Longrightarrow \quad |v_0| = \sqrt{R\,g\,\tan\alpha}$$

On peut vérifier la cohérence dimensionnelle de ce résultat. Par ailleurs, on vérifie bien que la vitesse à laquelle le véhicule doit aborder la courbe est d'autant plus grande que R est grand et que l'angle

α est grand. Si α tend vers $\pi/2$ (cylindre aux murs verticaux) ou R tend vers l'infini (ligne droite en dévers), v_0 tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'à n'importe quelle vitesse finie, le véhicule glissera vers le bas du virage.

b) Le cas d'un glissement sans frottement le long d'un plan incliné a été traité dans la série préparatoire 02. On trouvait dans ce cas que la norme de la force $\vec{N}$ s'exerçant sur l'objet valait $|\vec{N}| = mg\cos\alpha$. Ici, l'équation (34) implique que $|\vec{N}| = \frac{mg}{\cos\alpha}$. Puisque $\cos\alpha \leq 1$, cette force est toujours plus grande que la précédente, voire beaucoup plus grande lorsque $\alpha \to \pi/2$