

Corrigé Série 1 : Rappels mathématiques

1 Dérivation des fonctions

1. $\frac{d}{dt} \cos(t) = -\sin(t)$
 2. $\frac{d}{dt} \sin(t) = \cos(t)$
 3. (*) $\frac{d}{dt} \tan(t) = \left(\frac{\sin(t)}{\cos(t)} \right)' = \frac{\cos(t) \cos(t) + \sin(t) \sin(t)}{\cos^2(t)} = \frac{1}{\cos^2(t)} = 1 + \tan^2(t)$
 4. $\frac{d}{dt} \ln(t) = \frac{1}{t}$
 5. $\frac{d}{dt} \sqrt{t} = \frac{d}{dt} t^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}}$
 6. $\frac{d}{dt} t^\alpha = \alpha t^{\alpha-1}$
 7. $\frac{d}{dt} \sin(t) \cos(t) = \sin(t)(-\sin(t)) + \cos(t) \cos(t) = \cos^2(t) - \sin^2(t)$
 8. $\frac{d}{dt} t \cos(t) = \cos(t) - t \sin(t)$
 9. (**) $\frac{d}{dt} t \cos(t) \sin(t) = \cos(t) \sin(t) - t \sin^2(t) + t \cos^2(t)$
 10. $\frac{d}{dt} \sin(t^2) = 2t \cos(t^2)$
- * $\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f \cdot \frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{1}{g}\right)' = f' \cdot \frac{1}{g} + f \cdot \left(\frac{-g'}{g^2}\right) = \frac{f'}{g} - \frac{f g'}{g^2}$
- ** $(fgh)' = f'gh + fg'h + fgh'$

2 Dérivation des fonctions composées

1. $\frac{d}{d\theta} \cos(\theta) = -\sin \theta$; $\frac{d}{dt} \cos(\theta) = \dot{\theta}(-\sin \theta) = -\omega \sin \theta$
2. $\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) = \cos \theta$; $\frac{d}{dt} \sin(\theta) = \omega \cos \theta$
3. $\frac{d}{d\theta} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2}(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})$; $\frac{d}{dt} \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\omega}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\omega}{2}(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2})$
4. $\frac{d}{d\theta} \sin(\theta) \cos(\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$
 $\frac{d}{dt} \sin(\theta) \cos(\theta) = \omega \cos^2 \theta - \omega \sin^2 \theta = \omega(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

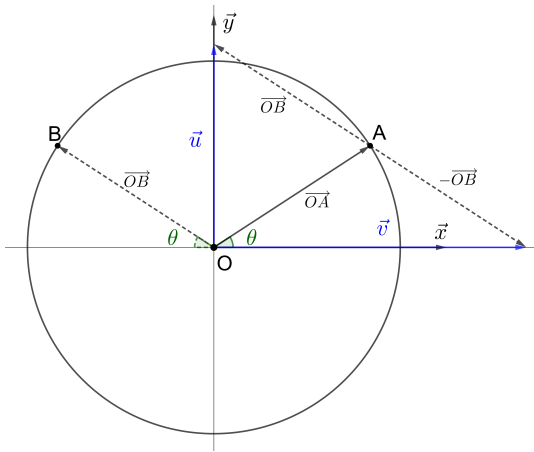
3 Dérivations (le retour !)

1. $\frac{d}{dt} \cos(\theta) = \frac{d\theta(t)}{dt} (-\sin(\theta(t))) = -\dot{\theta} \sin(\theta)$
2. $\frac{d}{dt} \sin(\theta) = \dot{\theta} \cos(\theta)$
3. $\frac{d}{dt} \tan(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\cos^2(\theta)} = \dot{\theta}(1 + \tan^2(\theta))$
4. $\frac{d}{dt} \ln(\theta) = \frac{\dot{\theta}}{\theta}$
5. $\frac{d}{dt} \sin(\theta) \cos(\theta) = \dot{\theta} \cos^2(\theta) - \dot{\theta} \sin^2(\theta) = \dot{\theta}(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta))$
6. $\frac{d}{dt} \theta^\alpha = \alpha \dot{\theta} \theta^{\alpha-1}$
7. $\frac{d}{dt} \theta \cos(\theta) \sin(\theta) = \dot{\theta} \cos(\theta) \sin(\theta) - \theta \dot{\theta} \sin^2(\theta) + \theta \dot{\theta} \cos^2(\theta)$

4 Vecteurs

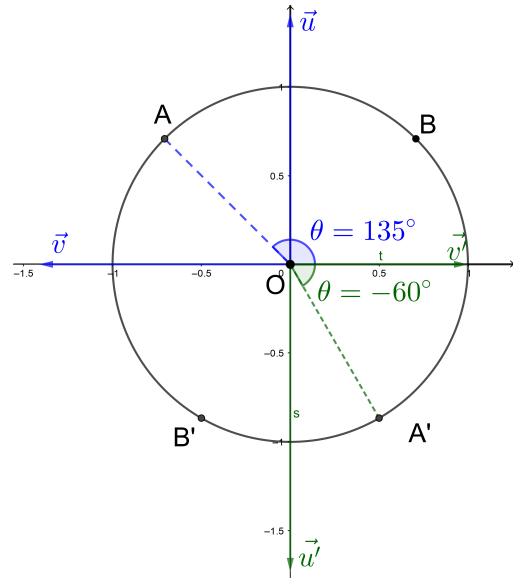
1. $\vec{OA} = R \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{OB} = R \begin{pmatrix} -\cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

2.



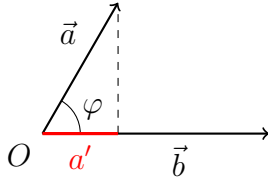
3. $\vec{u} = R \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \sin \theta \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = R \begin{pmatrix} 2 \cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$

4.



5 Produit scalaire

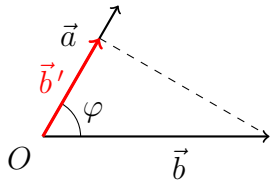
1.



Par trigonométrie, la longueur cherchée est

$$a' = ||\vec{a}|| |\cos \varphi| = \frac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{||\vec{b}||}.$$

2.

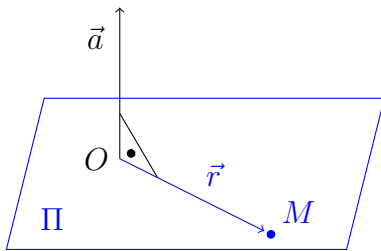


Le vecteur cherché est la projection algébrique (avec signe) multipliant le vecteur unitaire parallèle et de même sens que $\vec{a}$

$$\vec{b}' = ||\vec{b}|| \cos \varphi \frac{\vec{a}}{||\vec{a}||} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||^2} \vec{a}.$$

Remarque : $\vec{b}'$ et $\vec{a}$ sont opposés si $\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \cos \varphi < 0$.

3.



Condition d'orthogonalité : $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$.

6 Produit vectoriel

1. Par définition du produit vectoriel, l'aire est la norme $||\vec{a} \times \vec{b}||$.

2. L'aire d'un parallélogramme étant « base fois hauteur », $h = \frac{||\vec{a} \times \vec{b}||}{||\vec{b}||}$.

7 Unités et analyse dimensionnelle

1. La dimension de la constante de la gravitation universelle G et son unité dans le système SI sont respectivement,

$$G = \frac{L^3}{MT^2} \quad \text{ainsi} \quad G = \left[\frac{m^3}{kg \, s^2} \right] \quad (1)$$

2. Attention ! Il est important que tous les termes de l'expression donnent des mètres.

- (a) $\frac{m \cdot s^{-2}}{m \cdot s^{-1}} \Rightarrow s^{-1} \neq m$ non
- (b) $\frac{m \cdot s^{-1}}{m \cdot s^{-2}} \Rightarrow s \neq m$ non
- (c) $\frac{m^2 \cdot s^{-4}}{m \cdot s^{-1}} \Rightarrow m \cdot s^{-3} \neq m$ non
- (d) $\frac{m^2 \cdot s^{-2}}{m \cdot s^{-2}} \Rightarrow m$ oui !

L'expression (d) est donc la seule qui soit compatible avec la contrainte dimensionnelle.