

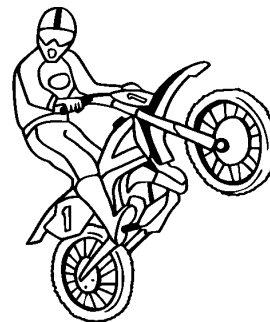
Série 14 : solides en rotation

Exercices d'introduction

A Saut en moto

Un motard effectue un saut dans un terrain de moto-cross :

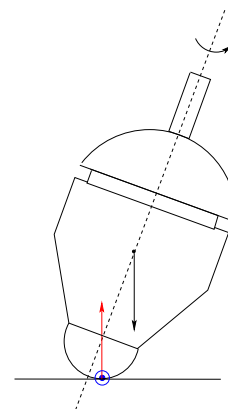
1. Expliquez ce qu'il se passe s'il actionne le frein arrière alors qu'il est en l'air.
2. Expliquez ce qu'il se passe s'il actionne le frein avant alors qu'il est en l'air.
3. Pourquoi, dans la pratique, un motard de cross actionne-t-il le frein arrière plutôt que le frein avant quand il est en l'air ?



B Toupie

Une toupie en forme de cône de pin est munie d'une rainure dans laquelle une ficelle est enroulée. La ficelle est attachée à un bâton sur lequel on tire pour lancer la toupie en rotation rapide sur le sol. Lorsque la toupie glisse sur le sol et que son axe est incliné, montrer à l'aide du théorème du moment cinétique appliqué au centre de masse de la toupie que :

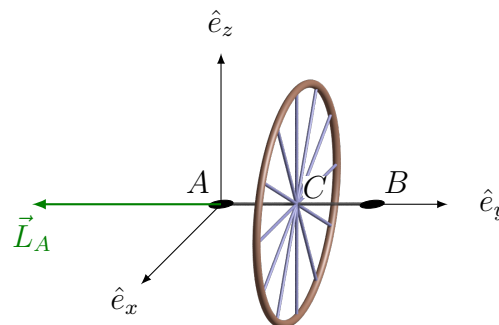
- la force de soutien \vec{N} du sol sur la toupie a pour effet de faire précesser la toupie.
- la force de frottement cinétique \vec{F}_c du sol sur la toupie a pour effet de redresser la toupie à la position verticale, dite "dormante".



C Roue soutenue par l'une des extrémités de son axe

On considère une roue de vélo, de masse m , dont l'axe est soutenu en deux points A et B pour le maintenir horizontal et immobile (voir dessin). La roue est en rotation autour de son axe et possède un moment cinétique \vec{L}_A par rapport à A .

Que se passe-t-il lorsqu'on supprime le soutien en B ? Expliquez, et dessinez tous les vecteurs impliqués dans le raisonnement.



D Freinage d'un cylindre en rotation

Un cylindre de rayon R , de masse m et de moment d'inertie $I_O = \frac{1}{2}mR^2$ tourne autour de son axe de symétrie O , fixe dans le référentiel, avec une vitesse angulaire initiale $\vec{\omega}_0 = \vec{\omega}(t=0)$.

Il subit une force de frottement fluide sur sa circonférence, proportionnelle à sa vitesse angulaire, que l'on modélise comme une seule force \vec{F} de direction tangentielle appliquée en un point de la surface du cylindre et dont la norme vaut $|\vec{F}| = k\omega$, $k \in \mathbb{R}$.

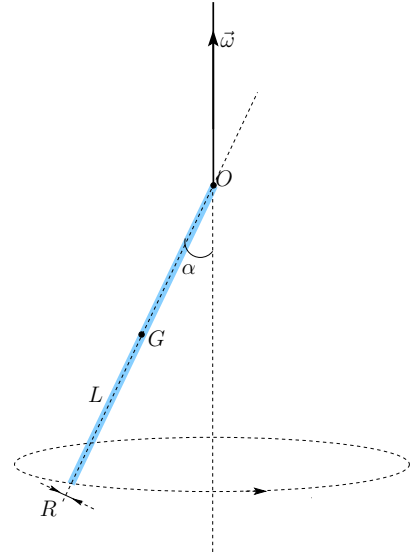
1. En utilisant le théorème du moment cinétique, donner l'équation différentielle pour la vitesse angulaire $\omega(t)$.
2. Quelle est la forme de la solution ? Déterminer l'évolution $\omega(t)$ de la vitesse angulaire en tenant comptes des conditions initiales.

Problèmes

1 Tige en rotation^[** 25 min]

Une tige cylindrique homogène de masse M , de longueur L et de rayon $R \ll L$ est attachée à une de ses extrémités en un point fixe O , et tourne avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ constante autour d'un axe vertical passant par O (voir dessin). Le vecteur $\vec{\omega}$ pointe vers le haut. La tige est soumise au champ de pesanteur \vec{g} , et est libre de prendre toute orientation autour du point O . Déterminer l'angle α de l'axe de la tige par rapport à la verticale.

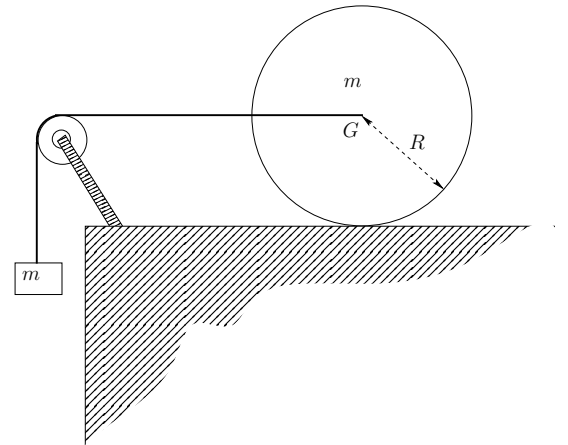
Indication : $\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$.



2 Roue tirée par un bloc^[** 25 min]

Une roue verticale, pleine et homogène, de masse m et de rayon R , roulant sans glisser sur une table horizontale, est tirée au niveau de son axe par un fil inextensible, passant par une poulie et à l'extrémité duquel est suspendu un bloc de même masse m (voir figure). Le fil et la poulie ont des masses négligeables. Le fil reste toujours tendu. Le système est initialement au repos. Après un certain temps, la roue a avancé d'une distance d .

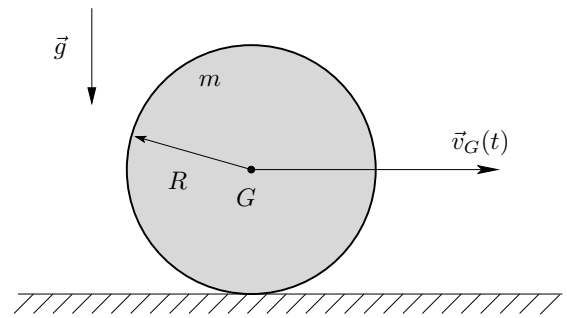
- Quelle est alors la vitesse de son centre de masse ?
- Etant donné que la roue ne glisse pas, que peut-on dire du coefficient de frottement statique μ_s entre la roue et la table ?



3 Boule de bowling^[*** 30 min]

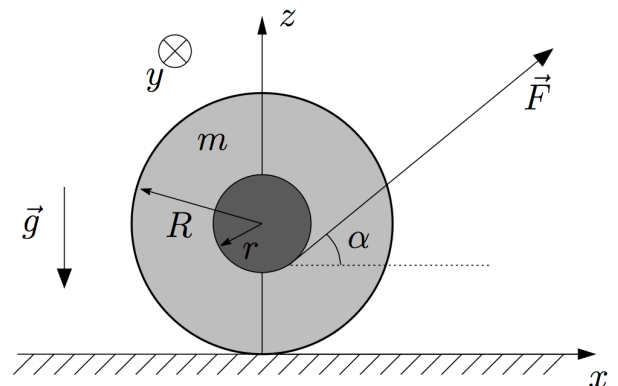
Une boule de bowling homogène, de masse m , de rayon R , et de moment d'inertie $I_G = \frac{2}{5}mR^2$ par rapport à un axe passant par son centre de masse G , est lancée sur un sol horizontal. Au temps $t_0 = 0$, la boule glisse sur le sol avec une vitesse du centre de masse $\vec{v}_G(t_0) = \vec{v}_0$ horizontale et une vitesse angulaire de rotation $\vec{\omega}(t_0) = \vec{0}$. À cause du frottement sur le sol, la boule se met à rouler et le roulement devient sans glissement au temps t_1 . Le coefficient de frottement cinétique est μ_c et le coefficient de frottement statique est μ_s . On néglige les frottements de l'air.

- Énumérer les forces qui s'appliquent sur la boule entre t_0 et t_1 , et les représenter avec leurs points d'application sur un dessin.
- Écrire les équations différentielles du mouvement de la boule entre t_0 et t_1 .
- Calculer le temps t_1 .
- Représenter la fonction $v_G(t)$ sur un graphique à l'échelle, pour $0 \leq t \leq 2t_1$. Justifier l'évolution de $v_G(t)$ à partir du temps t_1 .



4 Bobine tirée par un fil^[*** 30 min]

Une bobine de fil, de rayon externe R , de masse m , et de moment d'inertie I par rapport à son axe de symétrie cylindrique, peut rouler sans glissement sur une surface horizontale. L'enroulement du fil sur la bobine a un rayon $r < R$. On applique une force \vec{F} sur la partie déroulée du fil, comme indiqué sur le dessin. Le fil est inextensible et sans masse. La force \vec{F} fait un angle α constant avec l'horizontale et sa norme est telle que la bobine ne glisse pas et ne se soulève pas.



- Faire un dessin indiquant toutes les forces s'exerçant sur la bobine, ainsi que leurs points d'application.
- Écrire les équations du mouvement de la bobine, et les résoudre pour exprimer son accélération angulaire en fonction des données du problème.
- Quelle est la condition sur l'angle α pour que la bobine soit à l'équilibre statique lorsque $|\vec{F}| > 0$?

Elements de réponse :

Exercice 1 :

Les solutions sont soit $\sin \alpha = 0$, soit

$$\cos \alpha = \frac{6Lg}{(4L^2 - 3R^2)\omega^2}. \quad (1)$$

Exercice 2 :

La vitesse vaut

$$v = 2\sqrt{\frac{gd}{5}}.$$

La condition de non-glissement est

$$\mu_s \geq \frac{1}{5} = 0.2.$$

Exercice 3 :

L'accélération angulaire vaut

$$\dot{\omega} = \frac{5}{2} \frac{\mu_c g}{R}.$$

Exercice 4 :

L'accélération angulaire vaut

$$\dot{\omega} = \frac{F(R \cos \alpha - r)}{I + mR^2}. \quad (2)$$