Série 04 : Coordonnées cylindriques et sphériques, Contraintes

Exercices d'introduction

A Changement de base [* 15 min]

Soit un vecteur $\vec{v}$ dont les coordonnées dans un repère $Oxyz$ s'écrivent $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$. Comment s'écrira ce vecteur dans un repère $Ox'y'z'$ où les axes z et z' sont identiques et où θ est l'angle entre x et x' ainsi qu'entre y et y' ?

B Système de coordonnées sphériques [* 30 min]

a) Exprimer les vecteurs de base cartésienne $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ en fonction des vecteurs de base en coordonnées sphériques $\vec{e}_r, \vec{e}_\phi, \vec{e}_\theta$.

b) Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sur les axes cartésiens en fonction des coordonnées sphériques $(r,\ \theta,\ \phi)$.

c) En calculant la dérivée du vecteur position $\overrightarrow{OP}$, démontrer que l'expression de la vitesse $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ est équivalente à l'expression de la vitesse en coordonnées sphériques vue en cours.

Questions facultatives pour continuer à s'entrainer :

d) Faire le même calcul pour obtenir l'expression de l'accélération $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ en coordonnées sphériques.

e) Refaire les mêmes calculs pour les coordonnnées cylindriques.

C Expression des contraintes : équation d'une surface [** 10 min]

Ecrire en coordonnées cartésiennes (x, y, z), cylindriques (ρ, ϕ, z) et sphériques (r, θ, ϕ) les équations des surfaces suivantes :
i) sphère de rayon R centrée à l'origine
ii) cylindre parallèle à l'axe z, de longueur L et de rayon R, centré à l'origine
iii) cône de révolution de hauteur h et de rayon R à sa base, dont l'axe est parallèle à l'axe z, ouvert vers les z positifs, et dont le sommet est placé à l'origine O.

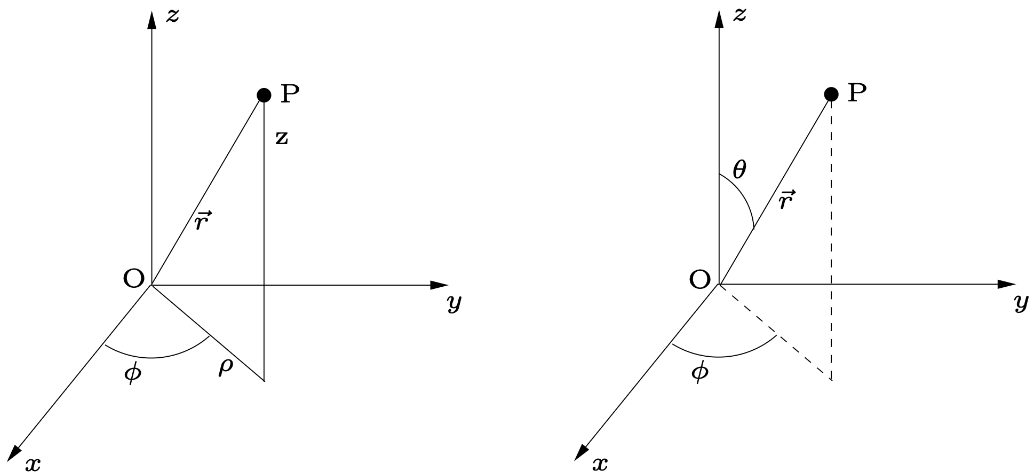


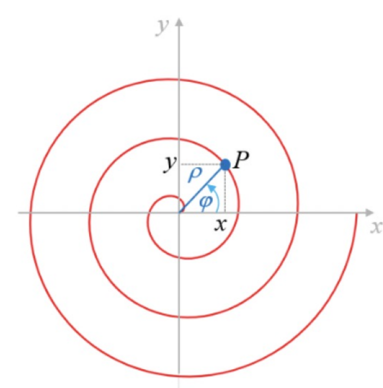
FIGURE 1 – Coordonnées cylindriques (gauche) et sphériques (droite)

Problèmes

---

1 Spirale [** 10 min]

Le point P parcourt la spirale ci-contre en partant de l'origine en $t = 0$, à vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\phi}$. Le rayon de la spirale s'accroit linéairement dans le temps.



a) Exprimez le vecteur position $\vec{r}$ du point P en coordonnées cylindriques (ou polaires).

b) Exprimez ρ en fonction de ω et de t (on pourra introduire une constante λ ayant la dimension d'une longueur [m]).

c) Calculez les composantes de la vitesse suivant $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ en fonction de ω, t et λ.

d) Faire de même pour les composantes de l'accélération. Peut-on en déduire facilement l'accélération centripète ou tangentielle ?

2 Point sur un cylindre [*** 30 min]

Un point matériel est astreint à se déplacer sur un cylindre infiniment long et de rayon R. Le point matériel est attiré vers un point fixe O sur l'axe du cylindre par une force proportionnelle à la distance du point matériel au point O. Il n'y a pas d'effet de pesanteur ni de friction.

a) Enumérer les forces subies par le point matériel. Faire un dessin représentant ces forces ainsi que le repère associé au système de coordonnées choisi.

b) Ecrire les équations du mouvement et les projeter sur ce repère.

c) Décrire le mouvement du point matériel. Pour cela, résoudre les équations du mouvement.

d) Discuter le sens de la force de liaison en fonction des conditions initiales.

3 Araignée physicienne [*** 20 min]

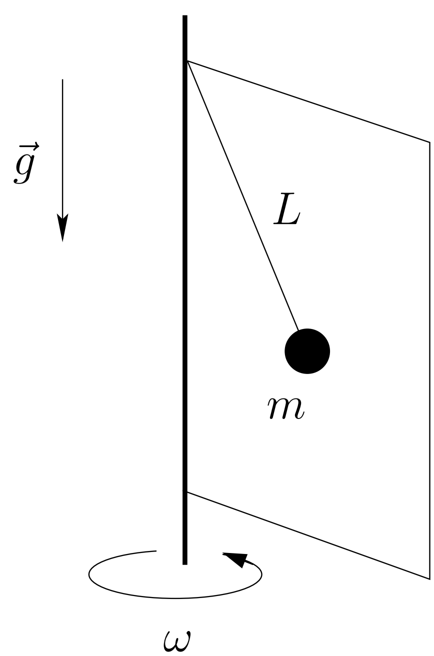
Une araignée est suspendue à un fil inextensible de longueur L attaché au plafond. Elle observe qu'elle tourne en rond autour de la verticale avec une vitesse de norme $|\vec{v}|$ constante. Grâce au cours qu'elle a suivi, elle peut montrer que la pulsation ω de son mouvement circulaire ne dépend que de la distance verticale h entre sa trajectoire et le plafond. Faites comme elle et calculez cette pulsation !
Si, au lieu de tourner en rond, l'araignée s'était simplement laissée balancer au bout du fil (dans un plan vertical), la période de son mouvement aurait-elle été plus grande ou plus petite ?

4 Pendule sur une porte [*** 20 min]

Un pendule formé d'un point matériel de masse m et d'un fil inextensible sans masse de longueur L est astreint à osciller dans le plan d'une porte qui tourne autour d'un axe vertical à vitesse angulaire ω constante. Le pendule est attaché à l'axe de rotation de la porte. Il n'y a pas de frottements.

a) Ecrire les équations du mouvement du pendule.

b) Vérifier qu'on retrouve les équations attendues dans les cas limites $\omega \to 0$ et $L \to 0$.



Eléments de réponse

Problème 2 : La force de liaison obtenue est égale à

$$N_\rho = kR - mR\omega_1^2 = mR(\frac{k}{m} - \omega_1^2) = mR(\omega_0^2 - \omega_1^2) = cte.$$

Problème 3 : La pulsation est égale à :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}$$

Problème 4 :
Quand $\omega \to 0$, on obtient l'équation $mg\sin\theta = mL\ddot{\theta}$.
Quand $L \to 0$, on obtient à partir de la projection de l'équation du mouvement sur $\hat{e}_\theta$ que $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.