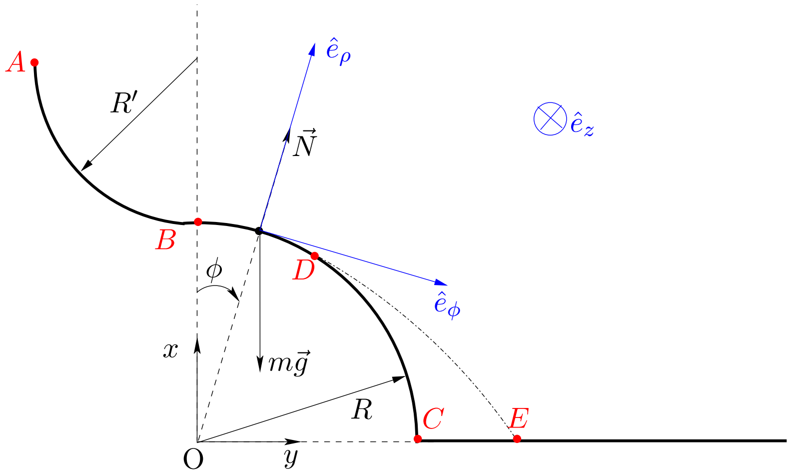
Problème 1 : Saut en luge (11 points)

a) **[2.5 points]**



Les forces agissant sur la luge sont le poids $m\vec{g}$ et, lorsque le luge est en contact avec la piste, la force de soutien $\vec{N}$ de la piste. **[1 pt; -0.5 par force oubliée ou en trop]**

Sur un petit déplacement $d\vec{r}$ de la luge, le travail du poids vaut $m\vec{g}\cdot d\vec{r} = -mg\hat{e}_x \cdot d\vec{r} = -mg\,dx$, qui n'est pas nul si le déplacement a une composante verticale. Donc le poids travaille [**0.5 pt**]. De plus, il s'agit d'une force conservative car son travail ne dépend pas du chemin parcouru. [**0.5 pt**]

Lorsque la luge touche la piste la force de soutien $\vec{N}$ est toujours perpendiculaire à la piste et au vecteur vitesse. Elle ne travaille donc pas [**0.5 pt**]. Comme elle ne dérive pas d'un potentiel, elle n'est pas conservative.

b) **[3 points]**

D'après la question précédente, l'énergie mécanique est conservée et son expression est $E = \frac{1}{2}mv^2 + mgx$ [**1 pt**].

En utilisant la conservation de l'énergie entre les points A et B on obtient:

$$E_{\mathtt{A}} = E_{\mathtt{B}} \;\Rightarrow\; 0 + mg(R'+R) = \frac{1}{2}mv_{\mathtt{B}}^2 + mgR \;\Rightarrow \frac{1}{2}mv_{\mathtt{B}}^2 = mgR' \Rightarrow v_{\mathtt{B}}^2 = 2gR'$$

$$\Rightarrow\; v_{\mathtt{B}} = \sqrt{2gR'}\,.\ [\mathbf{1\ pt}] \tag{1}$$

En utilisant la conservation de l'énergie entre les points A et E on obtient:

$$E_{\mathtt{A}} = E_{\mathtt{E}} \implies mg(R'+R) = \frac{1}{2}mv_{\mathtt{E}}^2 \implies v_{\mathtt{E}} = \sqrt{2g(R'+R)}\,.\ [\mathbf{1\ pt}] \tag{2}$$

c) **[2 points]**

On utilise le repère associé aux coordonnées cylindriques $(\hat{e}_\rho,\, \hat{e}_\phi,\, \hat{e}_z)$. La deuxième loi de Newton,

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}\,, \tag{3}$$

est projetée successivement sur $\hat{e}_\rho$ et $\hat{e}_\phi$ pour donner les équations du mouvement suivantes:

$$-mg\cos\phi + N_\rho = -mR\dot{\phi}^2\,,\ [\mathbf{1\ pt}] \tag{4}$$

$$mg\sin\phi = mR\ddot{\phi}\,.\ [\mathbf{1\ pt}] \tag{5}$$

d) **[3.5 points]**

La conservation de l'énergie mécanique entre le point $\mathtt{A}$ et un point quelconque entre $\mathtt{B}$ et $\mathtt{D}$ repéré par l'angle ϕ donne

$$mg(R' + R) = \frac{1}{2}mv^2 + mgx = \frac{1}{2}mR^2\dot{\phi}^2 + mgR\cos\phi\,, \tag{6}$$

d'où l'on tire:

$$R\dot{\phi}^2 = 2g\left(1 + \frac{R'}{R} - \cos\phi\right)\,.\ \textbf{[1 pt]} \tag{7}$$

En introduisant ceci dans l'équation (4), on obtient

$$N_\rho = mg\left[3\cos\phi - 2\left(1 + \frac{R'}{R}\right)\right]\,.\ \textbf{[1 pt]} \tag{8}$$

La condition de décollement est $N_\rho = 0$, c'est-à-dire

$$\cos\phi_{\mathtt{D}} = \frac{2}{3}\left(1 + \frac{R'}{R}\right)\,.\ \textbf{[1 pt]} \tag{9}$$

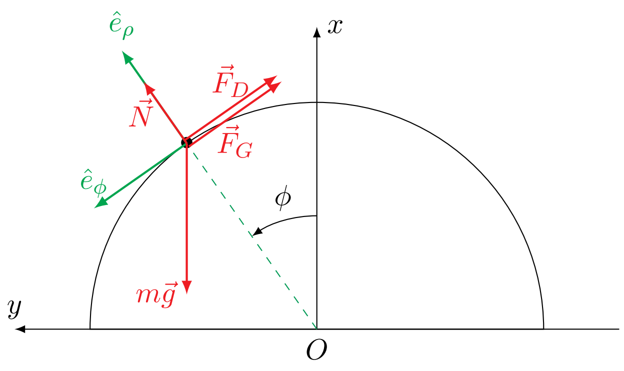
Puisque $R > 2R'$, l'expression de droite est inférieures à 1, et la solution pour l'angle $\phi_{\mathtt{D}}$ est

$$\phi_{\mathtt{D}} = \mathrm{acos}\left[\frac{2}{3}\left(1 + \frac{R'}{R}\right)\right]\,.\ \textbf{[0.5 pt]} \tag{10}$$

Problème 2 : Métronome (8 points)

a) **[2 points]**

Prenons un référentiel lié au support, et un repère en coordonnées cylindriques, comme indiqué sur le dessin. Les forces agissant sur la masse sont le poids $m\vec{g}$, le ressort à droite $\vec{F}_D$, le ressort à gauche $\vec{F}_G$ et la force de liaison $\vec{N}$ **[-0.5 par force incorrectement dessinée, oubliée ou en trop. Sens de $\vec{N}$ inconnu.]**.



b) **[3 points]**

En coordonnées cylindriques, $\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\,\hat{e}_\rho + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\,\hat{e}_\phi + \ddot{z}\,\hat{e}_z$, avec les contraintes $\rho = R, \dot{\rho} = 0, \ddot{\rho} = 0$, et $z = 0, \dot{z} = 0, \ddot{z} = 0$. Donc,

$$\vec{a} = -R\dot{\phi}^2\,\hat{e}_\rho + R\ddot{\phi}\,\hat{e}_\phi\,. \tag{11}$$

Par ailleurs, dans le repère choisi, les forces s'écrivent

$$m\vec{g} = mg(-\cos\phi\,\hat{e}_\rho + \sin\phi\,\hat{e}_\phi) \tag{12}$$

$$\vec{F}_D = -kR\phi\,\hat{e}_\phi \tag{13}$$

$$\vec{F}_G = -kR\phi\,\hat{e}_\phi \tag{14}$$

$$\vec{N} = N_\rho\,\hat{e}_\rho \tag{15}$$

Par la deuxième loi de Newton, $m\vec{a} = \vec{F}_{tot}$, nous obtenons donc **[2 pts]** :

$$\begin{cases} -mR\dot{\phi}^2 = N_\rho - mg\cos\phi \\ mR\ddot{\phi} = mg\sin\phi - 2kR\phi\,. \end{cases} \tag{16}$$

L'equation différentielle pour ϕ est donc

$$\ddot{\phi} - \frac{g}{R}\sin\phi + 2\frac{k}{m}\phi = 0 \ \textbf{[1 pt]} \tag{17}$$

c) **[2 points]**

Toutes les forces sont conservatives ou ne travaillent pas, l'énergie mécanique est donc conservée et son expression est $E = \frac{1}{2}mv^2 + V$ avec $v^2 = R^2\dot{\phi}^2$ et

$$V = mgx + \frac{1}{2}k(\phi R)^2 + \frac{1}{2}k(\phi R)^2 \tag{18}$$

$$V(\phi) = mgR\cos\phi + kR^2\phi^2\,. \ \textbf{[1 pt]} \tag{19}$$

La condition d'équilibre est $\frac{dV}{d\phi} = 0$, avec ici $\frac{dV}{d\phi} = -mgR\sin\phi + 2kR^2\phi$, ce qui donne

$$-mgR\sin\phi + 2kR^2\phi = 0 \tag{20}$$

$$-\sin\phi + \frac{2kR}{mg}\phi = 0 \ \textbf{[1 pt]} \tag{21}$$

dont $\phi = 0$ est bien une solution possible.

d) **[1 point]**

Pour que l'équilibre soit stable, on doit avoir $\frac{d^2V}{d\phi^2} \geq 0$ au point d'équilibre, or

$$\frac{d^2V}{d\phi^2} = -mgR\cos\phi + 2kR^2\,. \tag{22}$$

En $\phi = 0$, la condition s'écrit donc $-mgR + 2kR^2 \geq 0$, c'est à dire

$$\frac{kR}{mg} \geq \frac{1}{2}$$