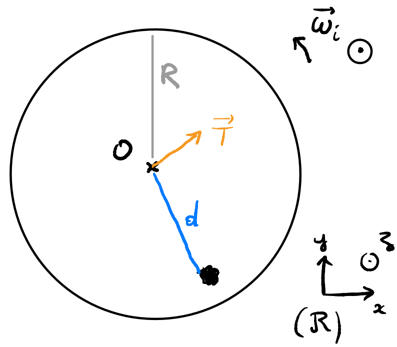
Ex. de collisions avec un solide

A) Choc mou sur un disque en rotation, axe fixe

Un pt. mat. (m) tombe verticalement sur une disque en rot. ω_i autour de Oz (O fixe dans $\mathcal{R}$)

Table à air $\rightarrow$ pas de frottements

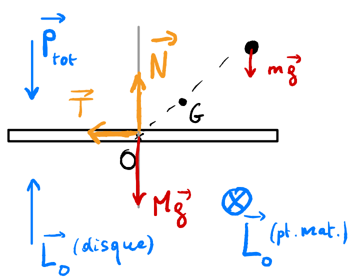


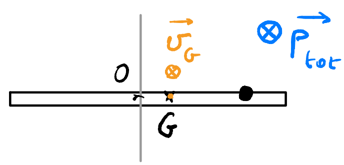
Système : pt. mat. + disque (M)

Bilan des forces externes

* Pesanteur : $M\vec{g}$ et $m\vec{g}$ $\rightarrow$ selon $\hat{e}_z$
* Réaction du support $\vec{N}$ $\rightarrow$ selon $\hat{e}_z$
* Liaison de l'axe Oz $\vec{T}$ $\rightarrow$ dans le plan x,y, en O

Vue de côté





Qtés conservées ? * Comme les forces $\vec{N}$ et $\vec{T}$ peuvent prendre des valeurs arbitraires durant la collision, aucune des composantes de $\vec{P}_{tot}$ n'est conservée.

* La seule force ayant un moment selon z peut être $\vec{T}$ mais elle s'applique en O $\rightarrow$ donc $\boxed{\vec{L}_O^{tot} \cdot \hat{e}_z = \text{conservé}}$

Initial : $\vec{L}_O^{tot} \cdot \hat{e}_z = \frac{1}{2} M R^2 \omega_i$

Final $= \frac{1}{2} M R^2 \omega_f + m d^2 \omega_f = \left(\frac{1}{2} M R^2 + m d^2 \right) \omega_f$

Donc $$\boxed{\omega_f = \frac{\frac{1}{2} M R^2}{\frac{1}{2} M R^2 + m d^2} \, \omega_i} < \omega_i$$

B) Même choc mou, mais le disque est libre selon x, y.

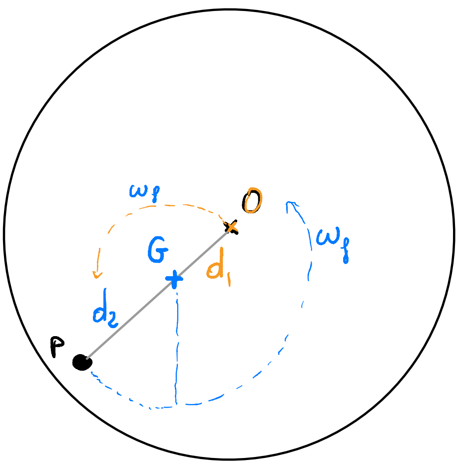
↳ plus aucune force dans le plan x, y.

↳ $\vec{P}_{tot} \cdot \hat{e}_x$, $\vec{P}_{tot} \cdot \hat{e}_y$ sont conservées. → syst. isolé dans le plan x, y.

Or $\vec{P}_{tot} = m_{tot} \times \vec{v}_G = (M + m) \vec{v}_G$

donc $\dot{x}_G$, $\dot{y}_G$ sont constantes.

Avant le choc : $\dot{x}_G = \dot{y}_G = 0$ → G fixe après le choc (x, y)



D'autre part, $\vec{L}_G^{tot} \cdot \hat{e}_z$ est conservée

Initial : $\vec{L}_G^{disque} = \vec{L}_O^{d} + \vec{GO} \wedge m \cancel{\vec{v}_O} = \vec{L}_O^{disque}$

↳ vitesse du c.d.m. du disque.

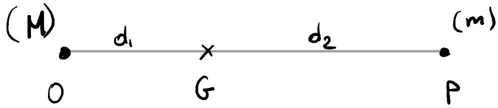
$= \frac{1}{2} M R^2 \omega_i$

Final : $L_{G,z}^{tot} = L_{G,z}^{disque} + L_{G,z}^{p.m.}$

$* \; L_{G,z}^{pt. mat} = m d_2^2 \omega_f$

$\star \; L^{disque}_{G,z} = I_{Gz}\,\omega_f = \left(I_{Oz} + d_1^2 M\right)\omega_f = \left(\frac{1}{2}MR^2 + d_1^2 M\right)\omega_f$

Reste à trouver d_1 et d_2



Par déf. : $M\,\overrightarrow{GO} + m\,\overrightarrow{GP} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} M d_1 - m d_2 = 0 & (1) \\ d_1 + d_2 = d & (2) \end{cases}$

$(1) + m \times (2)$: $\quad M d_1 + m d_1 = m d \Rightarrow \boxed{d_1 = \dfrac{m}{m+M}\, d}$

$M\,(2) - (1)$: $\quad M d_2 + m d_2 = M d \Rightarrow \boxed{d_2 = \dfrac{M}{m+M}\, d}$

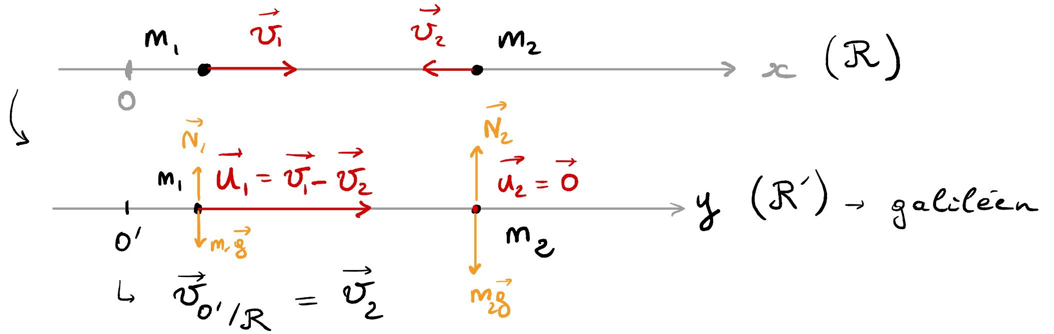
Donc : $M d_1^2 + m d_2^2 = \mu d^2$ où $\mu = \dfrac{mM}{m+M}$

Ainsi, après le choc : $L^{tot}_{G,z} = \omega_f\left(\frac{1}{2}MR^2 + \mu d^2\right) = \frac{1}{2}MR^2\,\omega_i$

$$\boxed{\omega_f = \frac{\frac{1}{2}MR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + \mu d^2}\,\omega_i}$$

Choc élastique frontal

Toutes les vitesses, avant et après le choc, sont colinéaires



on travaille dans $\mathcal{R}'$ en trans rect. uniforme p/r à $\mathcal{R}$ à vitesse $\vec{v}_2$ → m_2 immobile dans $\mathcal{R}'$ avant le choc.

$$\vec{v}_{/\mathcal{R}} = \vec{v}_{/\mathcal{R}'} + \vec{v}^{(e)}$$
$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + \vec{v}_2$$

Après choc, on cherche $\vec{u}_1'$ et $\vec{u}_2'$

Quantités conservées

Système = m_1 & m_2

* Pas de forces selon $\hat{e}_x$ → $\vec{p}_{tot} \cdot \hat{e}_x = \text{constante}$

(1) $$\boxed{m_1 u_1 = m_1 u_1' + m_2 u_2'}$$ où $u_1 = \vec{u}_1 \cdot \hat{e}_x$

* Choc élastique → énergie cin. totale conservée

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$$

(2) $$\boxed{m_1 u_1^2 = m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2}$$

D'après (2) : $m_1 (u_1^2 - u_1'^2) = m_2 u_2'^2$

$$\Leftrightarrow m_1 (u_1 - u_1')(u_1 + u_1') = m_2 u_2'^2$$

Or d'après (1) : $m_1 (u_1 - u_1') = m_2 u_2'$

d'où $u_1 + u_1' = u_2'$

En injectant dans (1) : $m_1 u_1 = m_1 u_1' + m_2 u_1 + m_2 u_1'$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1}$$

et $u_2' = \dfrac{m_1 - m_2 + m_1 + m_2}{m_1 + m_2} u_1 \boxed{= \dfrac{2m_1}{m_1+m_2} u_1}$

en repassant dans $\mathcal{R}$, on trouve le formulaire.

<u>Cas limites</u>

* <u>Coup de raquette</u> (m_1) dans balle à l'arrêt (m_2)

$m_1 \gg m_2$

Vitesse de la balle : $u_2' = \dfrac{2m_1}{m_1} u_1 = \boxed{2u_1}$ → 2 fois plus vite que la raquette.

* <u>Rebond d'une balle</u> (m_1) sur le sol (m_2 = Terre)

$m_1 \ll m_2$

Vitesse de la balle : $u_1' = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \boxed{-u_1}$ → change de signe

et $u_2' \simeq 0$ → ne bouge pas.

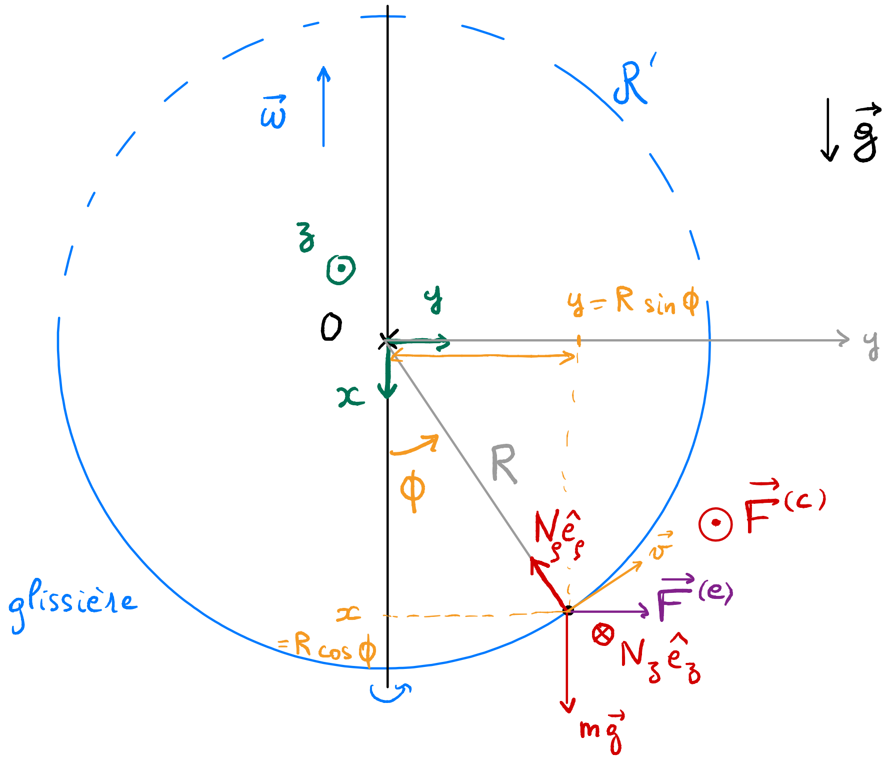
Ex : Point matériel qui glisse sans frottement dans un anneau en rotation

---

Système : pt. mat. (m)

Référentiel $\mathcal{R}'$: lié à l'anneau en rotation $\vec{\omega}$ p/r à $\mathcal{R}$ galiléen (auditoire)

↳ repère Oxyz lié à $\mathcal{R}'$



Forces : * liaisons $\vec{N}$ → perpendiculaire à $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}'$

→ ne travaillent pas dans $\mathcal{R}'$

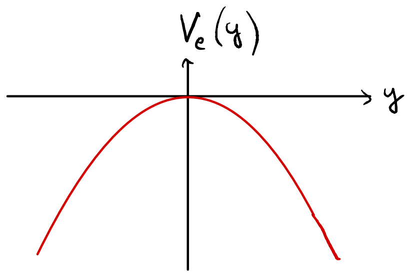
* Force de Coriolis : ⊥ à $\vec{v}$ dans $\mathcal{R}'$ → ne travaille pas.

* <u>Pesanteur</u> : $m\vec{g}$ → conservative : $V_p(x) = -mgx$

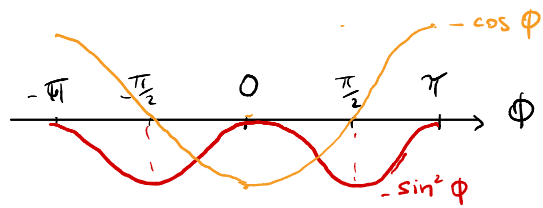
$$\boxed{V_p(\phi) = -mgR\cos\phi}$$

* <u>Force centrifuge</u> : $\vec{F}^{(e)} = m\omega^2 y\,\hat{e}_y$, travaille.

↳ dérive du potentiel : $V_e(y) = -\frac{1}{2}m\omega^2 y^2$



$$\boxed{V_e(\phi) = -\frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\phi}$$



<u>Conclusion</u> : * l'énergie mécanique est conservée

* On peut chercher les équilibres dans $V(\phi) = V_p(\phi) + V_e(\phi)$

$$V(\phi) = -mgR\cos\phi - \frac{1}{2}m\omega^2 R^2 \sin^2\phi = -mgR\left(\cos\phi + \frac{1}{2}\,\omega^2\frac{R}{g}\sin^2\phi\right)$$

on pose $\frac{R}{g} = \frac{1}{\omega_0^2}$ où ω_0 est une fréquence angulaire

$$\boxed{V(\phi) = -mgR\left(\cos\phi + \frac{1}{2}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\sin^2\phi\right)}$$ → on pose $\boxed{\eta = \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$

* <u>Equilibres</u> : $\frac{dV}{d\phi} = -mgR\left(-\sin\phi + \frac{1}{2}\eta\, 2\sin\phi\cos\phi\right)$

$$= mgR\sin\phi\,\left(1 - \eta\cos\phi\right)$$

On résout $\frac{dV}{d\phi} = 0$:

1) $\sin\phi = 0 \Rightarrow \boxed{\phi_0 = 0}$ et $\boxed{\phi_\pi = \pi}$

2) $\cos\phi_{\pm} = \frac{1}{\eta} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \rightarrow$ deux solutions ϕ_+ et ϕ_-

si $\eta \geq 1$ $(\Leftrightarrow \omega > \omega_0)$

* Stabilité : $\frac{d^2V}{d\phi^2} = mgR\cos\phi\,(1-\eta\cos\phi)$

$\frac{d^2}{d\phi^2}(V(\phi))$

$+\, mgR\sin\phi\,\eta\sin\phi$

$$= mgR\left(\cos\phi + \eta\underbrace{\left(\sin^2\phi - \cos^2\phi\right)}_{1-2\cos^2\phi}\right)$$

1) En $\phi_0 = 0$: $\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi_0} = mgR\,(1+\eta(1-2))$

$= mgR\,(1-\eta) \rightarrow$ stable ssi $\eta < 1$

En $\phi_\pi = \pi$: $\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi_\pi} = mgR\,(-1+\eta\,(1-2))$

$= -mgR(1+\eta) < 0 \rightarrow$ instable

2) Si $\eta \geq 1$, deux autres équilibre $\phi_\pm$:

$$\left.\frac{d^2V}{d\phi^2}\right|_{\phi_\pm} = mgR\left(\frac{1}{\eta} + \eta\left(1 - 2\frac{1}{\eta^2}\right)\right) = mgR\left(\frac{\eta^2-1}{\eta}\right) > 0$$

$\hookrightarrow$ stable

* Pulsation propre des petites oscillations

$\hookrightarrow$ $k_{eff} = \frac{d^2V}{ds^2}$ où $s = R\phi \rightarrow ds = R\,d\phi$ $\quad ds^2 = R^2 d\phi^2$

$$= \frac{1}{R^2} \, mgR \left(\cos\Phi + \eta \left(1 - 2\cos^2\Phi\right)\right)$$

$\star$ Si $\eta < 1$ $(\omega < \omega_0)$, $k_{eff}(\Phi_0) = m\frac{g}{R}(1-\eta)$

$$= m\omega_0^2\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)$$

$\sqrt{\frac{k_{eff}}{m}}$

pulsation propre $\boxed{\tilde{\omega}_0 = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}}$ $\leqslant \omega_0$

$\star$ Si $\eta > 1$ $(\omega > \omega_0)$:

$$k_{eff}(\Phi_\pm) = m\omega_0^2\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right) = m\omega^2\left(1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4}\right)$$

↳ puls. pr : $\boxed{\tilde{\omega}_\pm = \omega\sqrt{1 - \frac{\omega_0^4}{\omega^4}} \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} \omega}$