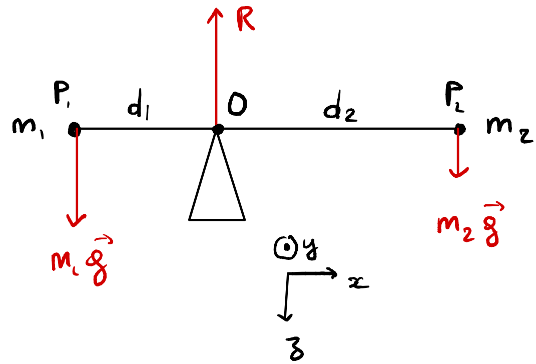
3) Equilibres statiques

Système : 2 masses m_1, m_2
liées par une tige sans masse



* PFD : $\vec{R} + m_1\vec{g} + m_2\vec{g} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{R} = -(m_1+m_2)\vec{g}}$$

* Th. du mom. cin. en O : $\sum \vec{\mathcal{M}}_O = \vec{0} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$ (équil.)

où $\sum_i \vec{\mathcal{M}}_{O,i} = \vec{OP_1} \wedge m_1\vec{g} + \vec{OP_2} \wedge m_2\vec{g}$

$= (-d_1\hat{e}_x) \wedge m_1 g\,\hat{e}_z + d_2\hat{e}_x \wedge m_2 g\,\hat{e}_z$ or $\hat{e}_x \wedge \hat{e}_z = -\hat{e}_y$

$= d_1 m_1 g\,\hat{e}_y - d_2 m_2 g\,\hat{e}_y$

$= (d_1 m_1 - d_2 m_2)\, g\,\hat{e}_y = \vec{0}$

Donc $\boxed{d_1 m_1 = d_2 m_2}$

III) Lois de conservations : Système de N points, $i \in [1;N]$

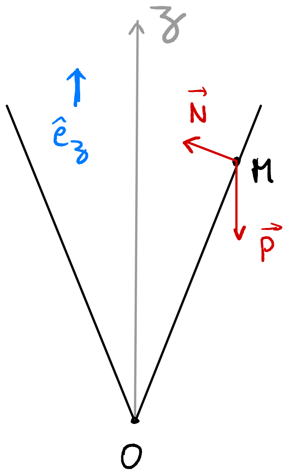
$$\boxed{\begin{array}{l} \sum_i \vec{F}_i^{ext} = \vec{0} \iff \vec{P}_{tot} \text{ et } \vec{v}_G \text{ sont conservées} \\ \sum_i \vec{OP_i} \wedge \vec{F}_i^{ext} = \vec{0} \iff \vec{L}_{O,tot} \text{ est conservé} \end{array}}$$

↳ on parle de système isolé

Plus généralement, si il existe une direction $\hat{u}$ telle que

$$\boxed{\begin{array}{ll} \left(\sum_i \vec{F}_i^{ext}\right)\cdot\hat{u} = 0 & \text{alors } \vec{P}_{tot}\cdot\hat{u} \text{ est conservée} \\ \left(\sum_i \vec{OP}_i \wedge \vec{F}_i^{ext}\right)\cdot\hat{u} = 0 & \text{alors } \vec{L}_{O,tot}\cdot\hat{u} \text{ est conservée} \end{array}}$$

↳ rotation libre autour de $\hat{u}$



$$\left.\begin{array}{l} \vec{OM}\wedge\vec{N} \odot \\ \vec{OM}\wedge\vec{P} \otimes \end{array}\right\} \cdot \hat{e}_z = 0$$

$L_z = \vec{L}_O\cdot\vec{e}_z$ est conservé

IV) Collisions (chocs)

On considère 2 pts mats qui interagissent pdt un bref instant

1) Energie cinétique totale ? K_{tot}

↳ dépend de la nature des forces internes

a) Si les forces internes sont conservatives (~ ressort)

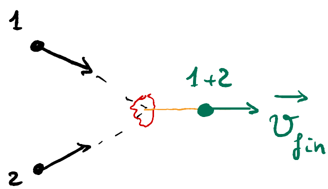
↳ $\boxed{\text{choc élastique}} \Leftrightarrow \boxed{K_{tot} \text{ est conservée}}$

$$\frac{1}{2}m_1\vec{v}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\vec{v}_2^{\,2}$$

b) Sinon, on a un $\boxed{\text{choc inélastique} \Leftrightarrow K_{tot} \text{ diminue}}$

$$\Delta K = K_{fin} - K_{init} < 0$$

<u>Cas particulier</u> : $\boxed{\text{choc mou} = \text{les 2 pts mat. fusionnent}}$



2) <u>Lois de conservation</u>

a) Si les forces externes restent constantes pendant la collision, alors les quantités conservées sont :

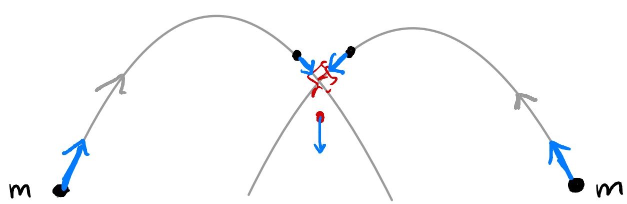
- la quantité de mvt. <u>totale</u>
- le moment cinétique <u>total</u> p/r | à un point fixe | au c.d.m.

" collision sans contraintes "

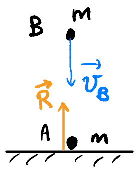
VRAI pour toutes les collisions (élastiques et inélast.)

$$\vec{P}_{tot}(\text{juste après}) = \vec{P}_{tot}(\text{juste avant})$$

<u>Ex</u> :



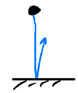
b) en présence de contraintes (réaction du support, tension d'un fil), les forces externes peuvent devenir très grande pdt la collision.



Ex: choc mou

Juste avant : $\vec{P}_{tot} = m\vec{v}_B$

Juste après : $\vec{P}_{tot} = \vec{0}$ (mou)

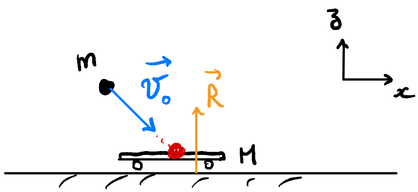


(si élastique une seule balle $\vec{P}_{tot} = -m\vec{v}_B$)

↳ Qté de mvt. totale n'est pas conservée car $\vec{R}$ devient très grande pdt la collision.

Toutefois, on peut avoir conservation de certaines projections de $\vec{P}_{tot}$ et $\vec{L}_{tot,O}$

Ex :

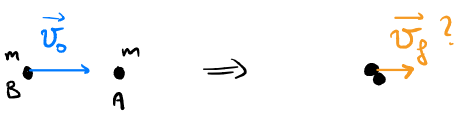


Selon $\hat{e}_z$, $\vec{P}_{tot} \cdot \hat{e}_z$ pas conservée

Selon $\hat{e}_x$, $\vec{P}_{tot} \cdot \hat{e}_x$ conservée

Ex : energie mécanique dissipée lors d'un choc mou

Situation : point A (m) à l'arrêt, point B (m), vitesse $\vec{v}_0$



Conservation de $\vec{P}_{tot}$

$\vec{P}_{tot} = m\vec{v}_0 \longrightarrow \vec{P}_{tot} = 2m\vec{v}_f$ donc $\boxed{\vec{v}_f = \frac{1}{2}\vec{v}_0}$

$K_{init.} = \frac{1}{2}m v_0^2$ $\quad K_{fin.} = \frac{1}{2}(2m)\frac{1}{4}v_0^2$ donc $\Delta K = \frac{1}{4}m v_0^2 - \frac{1}{2}m v_0^2$

$= -\frac{1}{4}m v_0^2 < 0$

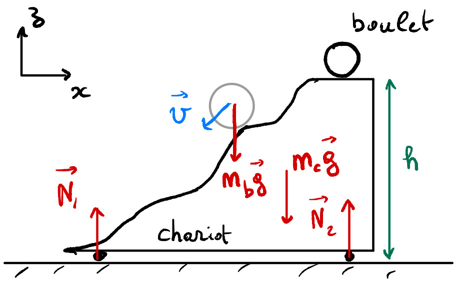
Comparaison : choc mou frontal

$K_{init} = m v_0^2 \Longrightarrow K_{fin} = 0$ donc $\Delta K = -m v_0^2$

---

3) Exercice : chariot à boulets → vitesse finale du chariot ?

sans frottements cinétiques



$\mathcal{R}$ = auditoire

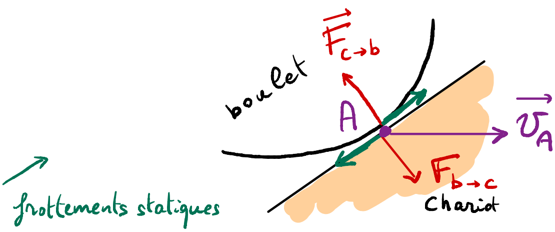
<u>Système</u> : chariot (m_c) + boulet (m_b)

<u>Bilan des forces externes</u> :

- réaction sur le chariot
- pesanteur

* Comme il n'y a pas de forces externes selon $\hat{e}_x$, $\vec{P}_{tot} \cdot \hat{e}_x$ est conservée

* Energie mécanique totale ? → <u>forces internes</u>



Puissances des forces internes :

$$\mathcal{P}_{c\to b} = \vec{F}_{c\to b} \cdot \vec{v}_A$$
$$= -\vec{F}_{b\to c} \cdot \vec{v}_A = -\mathcal{P}_{b\to c}$$

Puissance totale des forces internes : $\boxed{\mathcal{P}_{c\to b} + \mathcal{P}_{b\to c} = 0}$

<u>Les forces externes</u> :
- poids → <u>conservatif</u>
- réaction → <u>ne travaillent pas</u>

L'énergie mécanique totale est conservée

i) $\vec{P}_{tot} \cdot \hat{e}_x = 0$ initialement

$$0 = m_b v_{b,x} + m_c v_{c,x} \quad \text{où} \quad v_{b,x} = \vec{v}_b \cdot \hat{e}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{b,x} = -\frac{m_c}{m_b} v_{c,x}} \quad (1)$$

$\vec{v}_b$ est selon $\hat{e}_x$ après avoir quitté le chariot

ii) $E_{m,tot} = m_b g h$ initialement

$$\boxed{m_b g h = \frac{1}{2} m_b v_{b,x}^2 + \frac{1}{2} m_c v_{c,x}^2} \quad (2)$$

(1) → (2) :

$$m_b g h = \frac{1}{2} m_b \frac{m_c^2}{m_b^2} v_{c,x}^2 + \frac{1}{2} m_c v_{c,x}^2$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{m_c^2}{m_b} + m_c \right) v_{c,x}^2$$

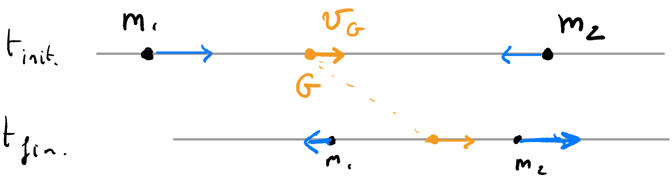
$$= \frac{1}{2} m_c \left(\frac{m_c}{m_b} + 1 \right) v_{c,x}^2 \quad \text{on pose} \quad \eta = \frac{m_c}{m_b}$$

Donc $v_{c,x}^2 = 2gh \frac{1}{\eta} \frac{1}{1+\eta} \Rightarrow \boxed{|v_{c,x}| = \sqrt{\frac{2gh}{\eta(1+\eta)}}}$

<u>Cas limite</u> : si $m_c \gg m_b$, alors $\eta \longrightarrow +\infty$ et $|v_{c,x}| \rightarrow 0$

↳ le chariot ne bouge pas.

4) Choc élastique en 1D



$$v_G = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{M}$$

$$u_1^* = u_1 - v_G \qquad \text{vitesse scalaires}$$

$$= \frac{m_2 (u_1 - u_2)}{M}$$

$$u_2^* = \frac{m_1 (u_2 - u_1)}{M}$$

a) Conserv. qté de mvt. dans $\mathcal{R}^*$

$$m_1 v_1^* + m_2 v_2^* = 0 \quad \Rightarrow \quad v_2^* = -\frac{m_1}{m_2} v_1^*$$

b) Conserv. én. cin. tot. :

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 v_2^{*2} = \frac{1}{2} m_1 u_1^{*2} + \frac{1}{2} m_2 u_2^{*2} = \frac{1}{2} \mu |u_1 - u_2|^2$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^{*2} + \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_2} v_1^{*2} = \frac{1}{2} \frac{m_1}{m_2} v_1^{*2} (m_2 + m_1) = \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)^2$$

$$v_1^{*2} = \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} (u_1 - u_2)^2 \quad \Rightarrow \quad v_1^* = \pm \frac{m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

$$v_1 = \frac{1}{M} \left(m_1 u_1 + m_2 u_2 \pm (m_2 u_1 - m_2 u_2) \right)$$

$$= u_1 \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{(m_1 - m_2) u_1 + 2 m_2 u_2}{m_1 + m_2}}$$

Similarly $\quad v_2^* = -\frac{m_2}{m_1} v_1^* = \pm \frac{m_1}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$

and $\quad v_2 = u_2 \quad$ ou $\quad \boxed{\frac{2 m_1 u_1 + (m_2 - m_1) u_2}{m_1 + m_2}}$