Théorie des éléments finis **Propé du 30 Octobre 2024**

Ecrivez le plus lisiblement possible. Les questions sont indépendantes.

Problème 1D stationnaire et éléments finis de degré 1 (12 x 0.5 points)

Soient c(x) et f(x) deux fonctions scalaires continues sur l'intervalle [0,1] et ε un réel positif, on cherche une solution approchée de u(x), solution sur l'intervalle [0,1] de :

$$-\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) = f(x) \quad \text{avec} \quad u(x=0) = u(x=1) = 0 \quad \text{(pb. 1)}$$

Il s'agit d'un problème de convection-diffusion stationnaire dans lequel le premier terme représente la diffusion et le second terme le terme de transport, c(x) étant la vitesse de transport. Le but de l'exercice est de trouver la solution approchée par éléments finis avec un maillage à pas défini par une progression géométrique.

1. Donner la formulation faible du problème ci-dessus en choisissant une fonction test v(x) à dérivée continue par morceaux et telle que v(0)= v(1)=0.

2. Soient N un entier positif et q un réel positif, on établit une discrétisation du segment [0,1] à l'aide d'une suite géométrique de raison q en posant :
   $x_{j+1} - x_j = h_j = q^j h_0$ pour j = 0,1, …N avec $x_0 = 0$. On a donc $x_i = \sum_{j=1}^{j=i-1} h_j$
   Calculez h_0 en fonction de q et N. On rappelle la somme des N premiers termes d'une suite géométrique : $\sum_{j=0}^{j=N} q^j = \dfrac{1-q^{N+1}}{1-q}$.

3. On définit alors les N fonctions d'interpolation linéaire (fonction chapeau) φ_i centrée en x_i. Faire un graphe de la distribution des x_i dans le cas q < 1 et dessinez une fonction φ_i. Quelle est le support (ou l'adhérence) d'une telle fonction φ_i ?

4. On appelle V_N l'espace vectoriel de dimension N des fonctions engendrées par les combinaisons linéaires des fonctions de base $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_N$. Ecrire l'approximation de Galerkin dans V_N du problème ci-dessus.

5. On note u_i l'approximation de u(x) en x_i pour i = 1, …, N. Montrer que le problème revient à résoudre un système linéaire de la forme $A\vec{u} = \vec{f}$, où A est une matrice carrée de taille NxN, $\vec{u}$ un vecteur de N composantes $u_1, \ldots u_N$ et $\vec{f}$ le vecteur second membre de taille N. Donner l'expression des composantes de la matrice A et du vecteur $\vec{f}$ en fonction des fonctions $\varphi_i(x)$ et $\varphi_i'(x)$ et des données du problème.

6. Quelle est la largeur de bande de la matrice A ? Justifiez votre réponse.

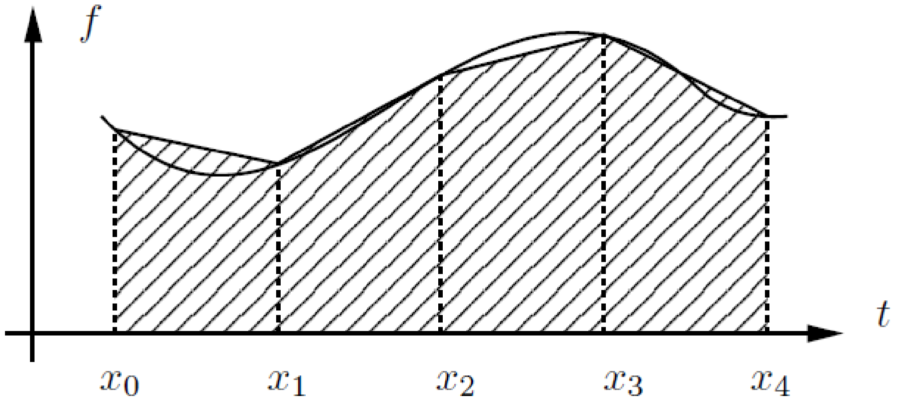
7. Par la suite, on pose $c(x)=c_0$, une constante. Calculez A_{ii} en fonction de i, q, h_0 et des données du problème.

8. Calculer $A_{i,i+1}$ en fonction de i, q, h_0 et des données du problème.

9. Calculer $A_{i,i-1}$ en fonction de i, q, h_0 et des données du problème.

10. Calculez la composante fj du vecteur second membre $\vec{f}$ en prenant $f(x)= f_0(1+x)$ à l'aide de la formule composite des trapèzes donnée ci-dessous.

Soit l(x) une fonction intégrable sur [0,1], alors $\int_0^1 l(x)dx \simeq \sum_{i=0}^{N-1}\left(\frac{x_{i+1}-x_i}{2}\right)\left(l(x_i)+l(x_{i+1})\right)$, somme des aires hachurées ci-dessous.



11. Dans le cas où $c(x)=c_0 < 0$, préconisez-vous de prendre q < 1 ou q > 1 ? Justifiez votre réponse.

12. Dans le cas où $c(x)=c_0$ et $f(x)= f_0$, déterminer la solution analytique du problème 1.

Boni (bonus au pluriel …)

13. Dans le cas où $c(x)=c_0$ et $f(x)= f_0(1+x)$, déterminer la solution analytique du problème 1.

14. Calculez la composante fj du vecteur second membre $\vec{f}$ en prenant $f(x)= f_0(1+x)$ à l'aide d'un calcul exact et comparez avec la valeur donnée par la formule des trapèzes.