

Cours 7: mercredi 5 Nov 25

Intérêts des éléments finis

Matrices élémentaires, assemblage et intégration de Gauss-Legendre

Modélisation aux EF.

Présentation de Abaqus, les unités dans Abaqus

Avantages :

On peut traiter des géométries complexes (impossible analytiquement).

S'avère utile quand les expériences sont impossibles, chères, dangereuses, trop longues etc.

On obtient une information « complète » (résolue en temps / espace).

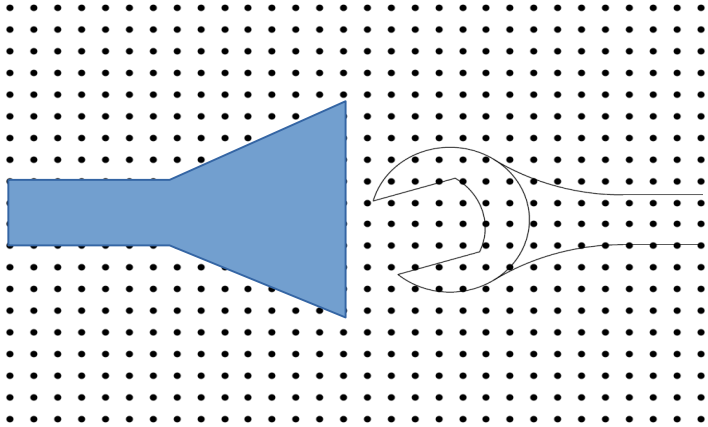
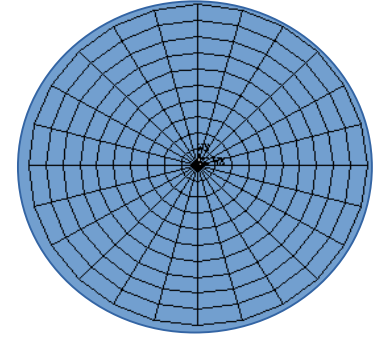
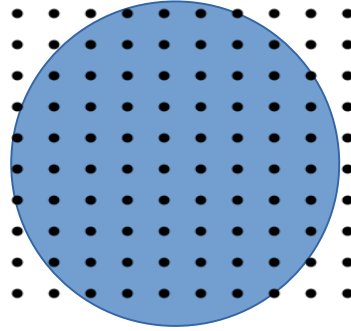
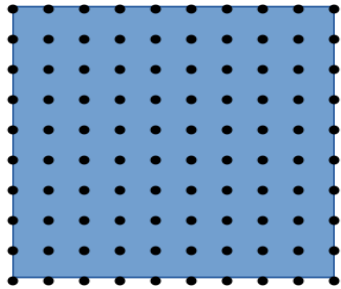
Inconvénient / risque :

On peut facilement obtenir des résultats plaisants mais faux

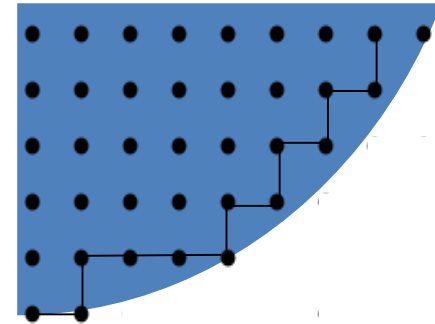
Il est important de comprendre la méthodologie, de justifier les hypothèses de modélisation, de vérifier la convergence (indépendance à la finesse du maillage, etc...)

Ce n'est pas un substitut à la théorie et aux expériences, mais un outil complémentaire.

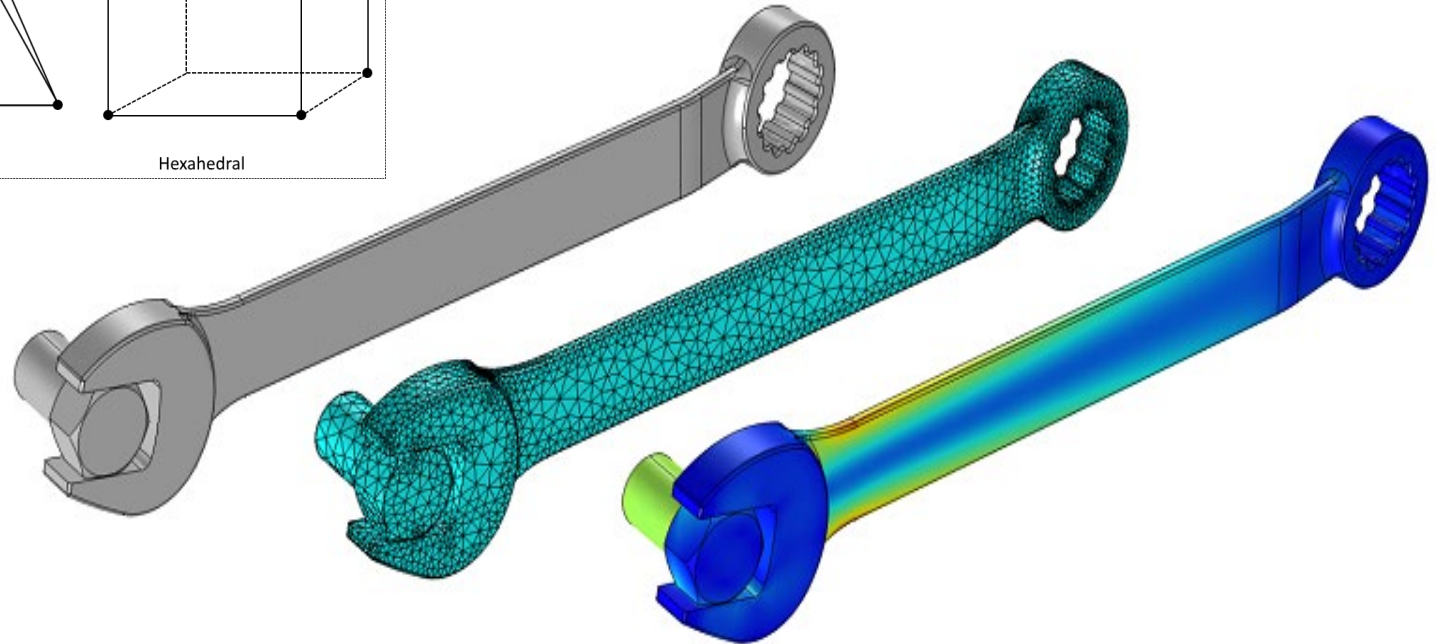
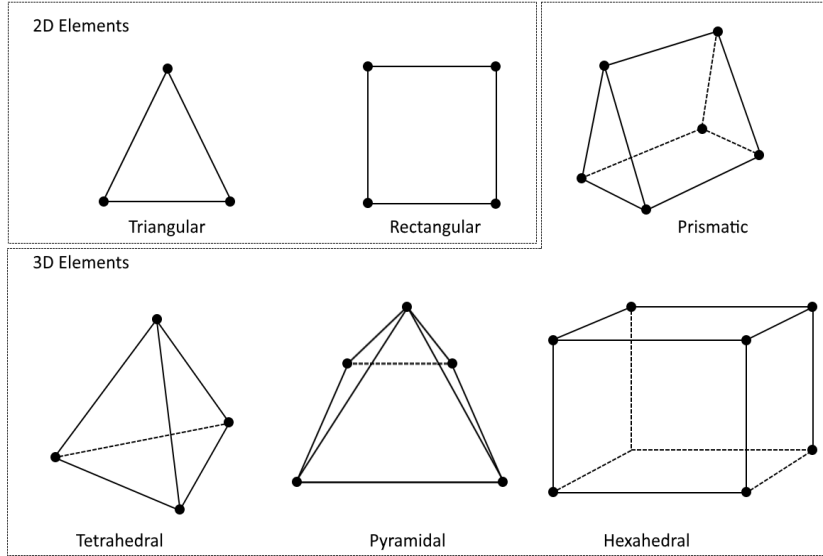
Les différences finies imposent un maillage structuré d'où un pb sur les frontières incurvées et sur les C.L.



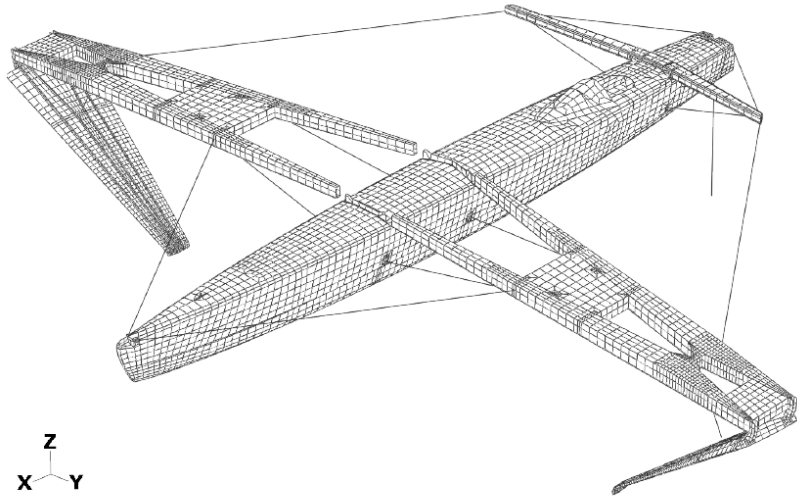
BCs are not correctly applied on round surfaces



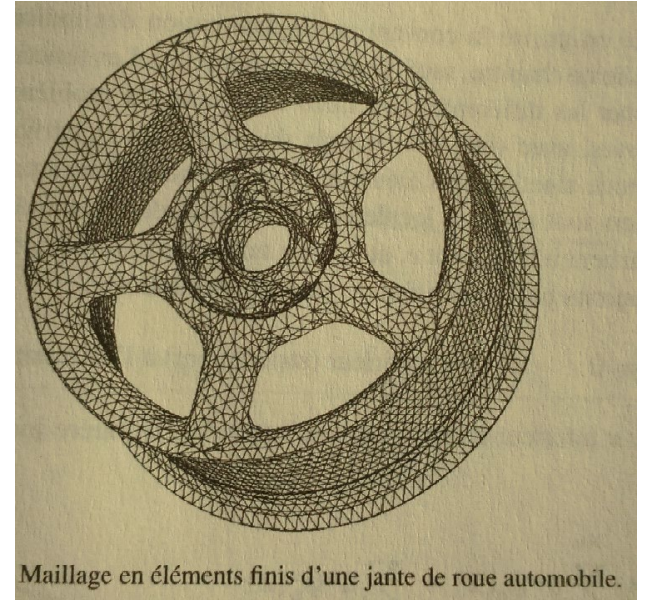
Les éléments finis permettent de mailler des géométries complexes
2D ou 3D: ils permettent de mailler les pièces dans les détails.



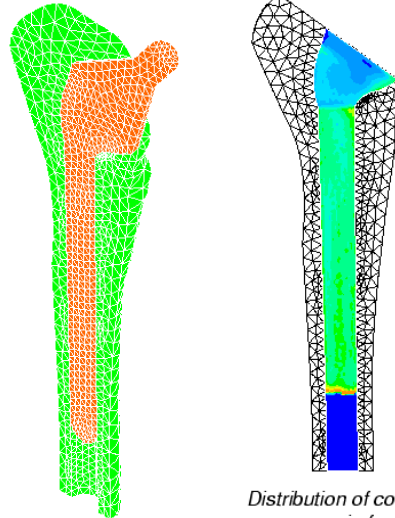
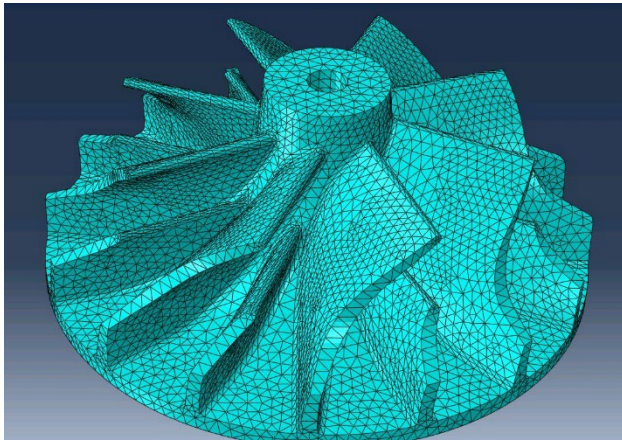
Géométries complexes



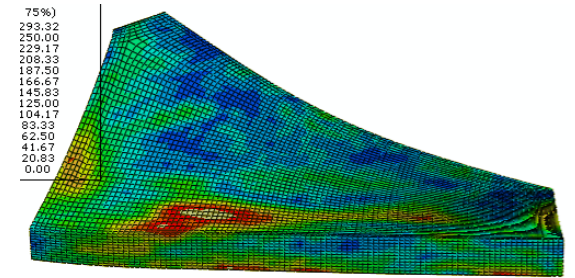
An much more complex mesh of an Hydroptere



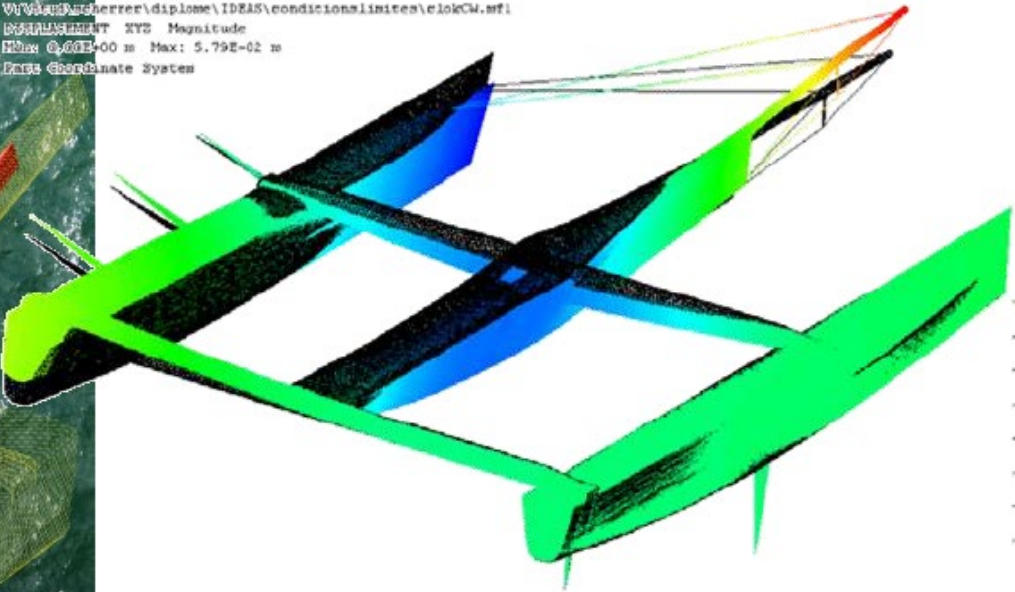
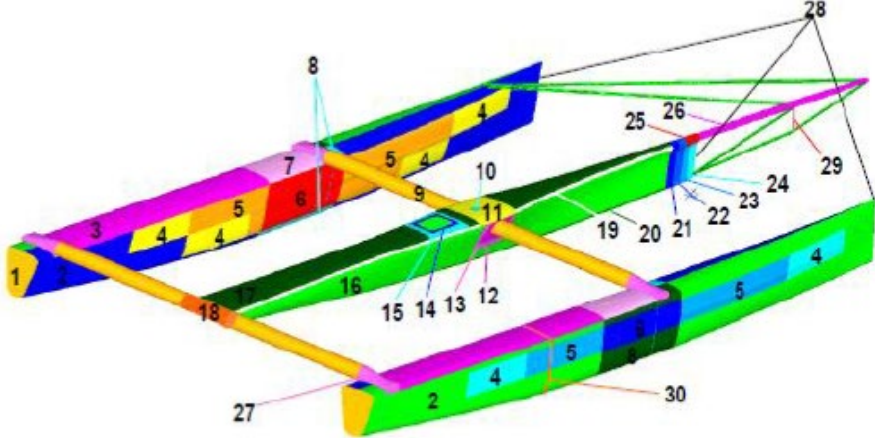
Maillage en éléments finis d'une jante de roue automobile.



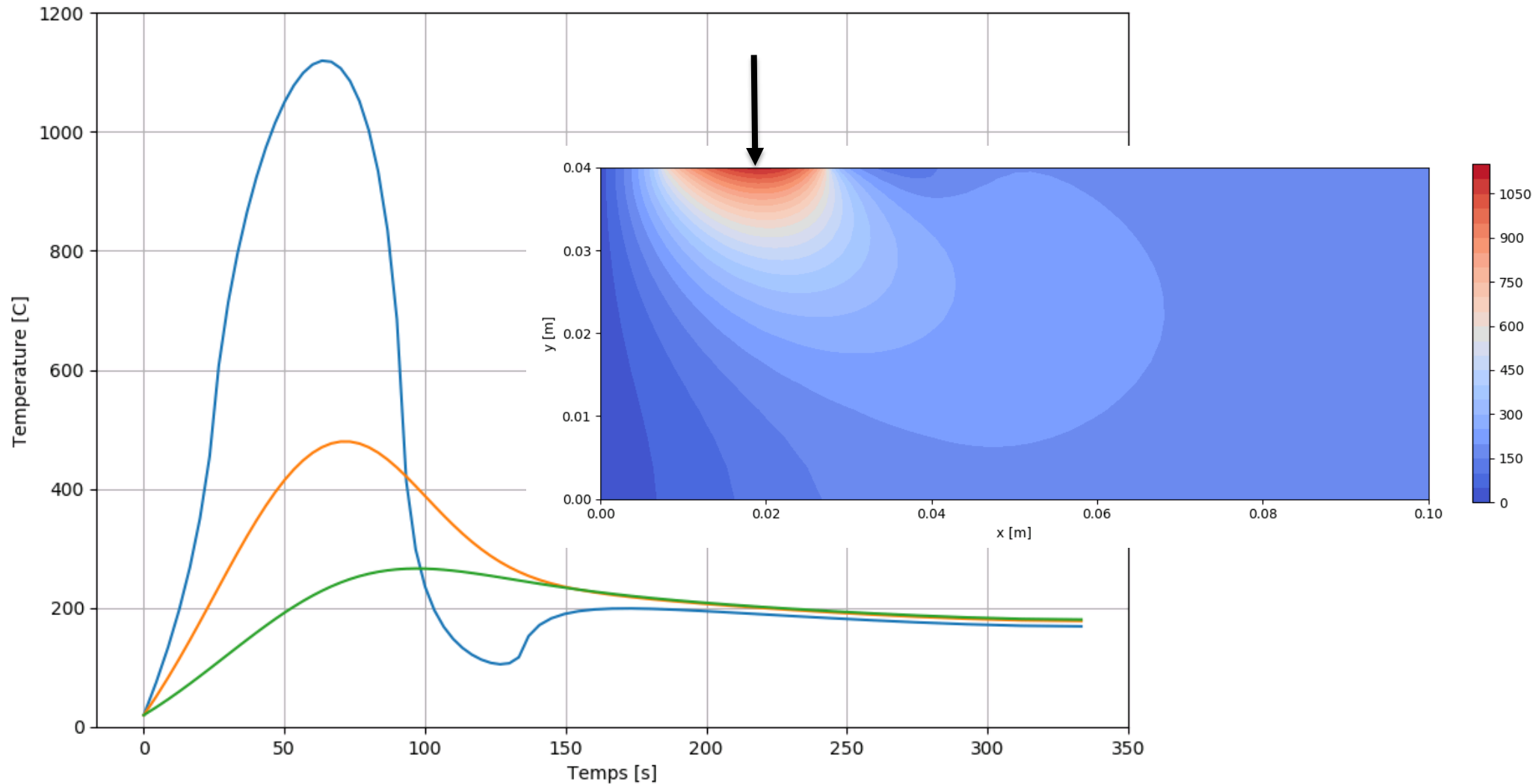
Distribution of contact pressure in femur.



Géométrie complexe et structure composite (30 matériaux différents)



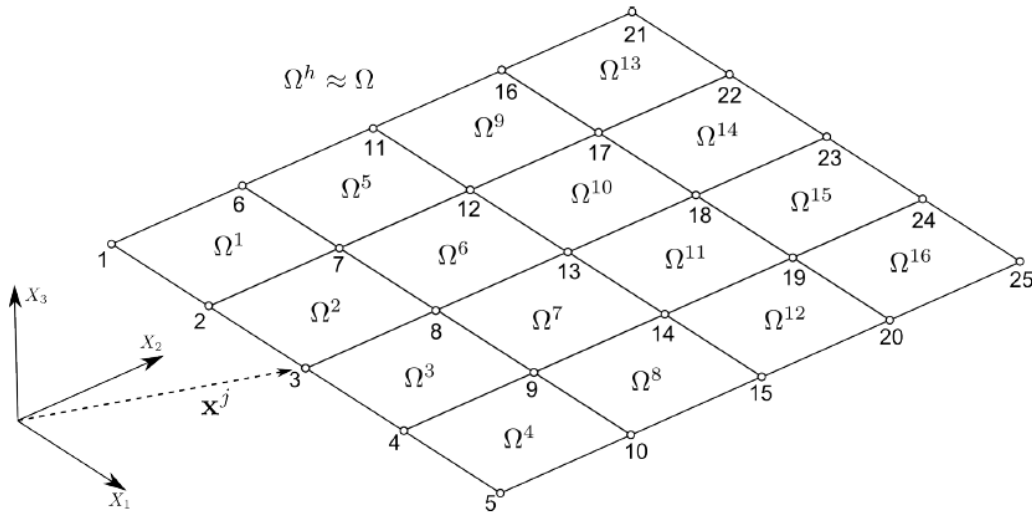
Intérêt des éléments finis: affinement local du maillage là où la solution est censée varier fortement.



Champ thermique stationnaire sous un laser

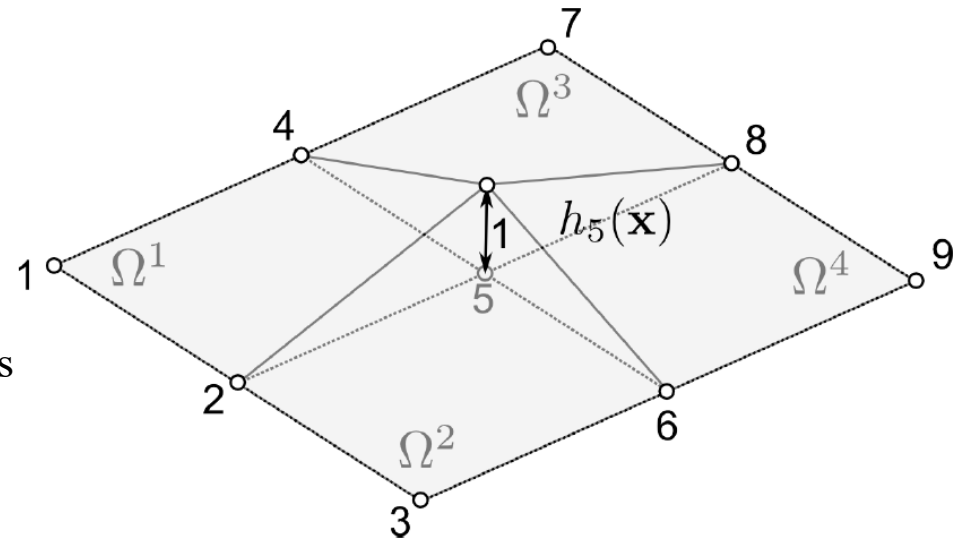
Matrices élémentaires

$$\Omega^h \approx \Omega, \quad \Omega^h = \Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \dots \cup \Omega^n$$



A simple mesh made of 16 elements and 25 nodes

Choix des fonctions de forme:
linéaire, quadratique, hybride ...etc



An illustration of $h_5(\mathbf{x})$ showing the compact support property

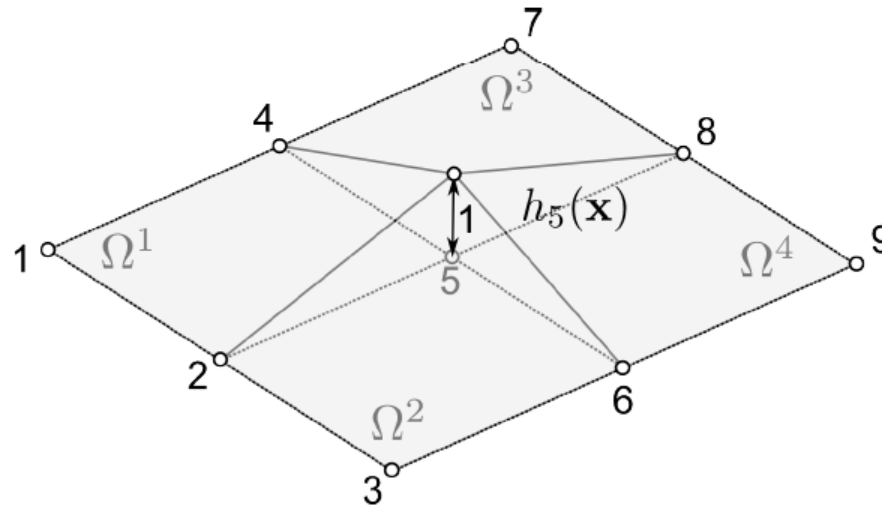
Matrices de masse $M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dV$ pour les pbs transitoires

et de rigidité $A_{ji} = \int_{\Omega} \varepsilon \vec{\nabla} \varphi_i \cdot \vec{\nabla} \varphi_j dV + \int_{\Omega} (\vec{v}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i) \varphi_j dV$

Matrices élémentaires

Intégration: réduction sur les supports des fonctions de forme

$$\int_{\Omega} d\Omega = \int_{\Omega^1} d\Omega + \int_{\Omega^2} d\Omega + \int_{\Omega^3} d\Omega + \int_{\Omega^4} d\Omega$$

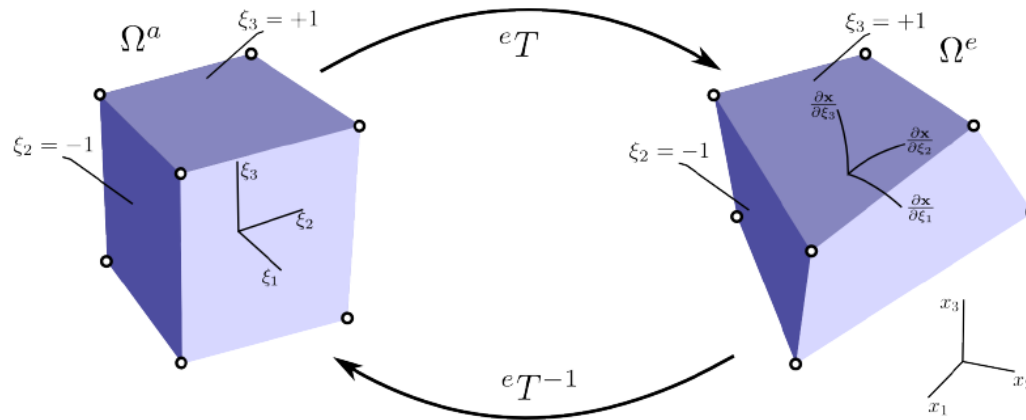


Matrices élémentaires sur l'élément Ω_e : masse $M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \varphi_i \varphi_j dV$

et rigidité $A_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \varepsilon \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dV + \int_{\Omega_e} (\vec{c}(\mathbf{x}, t) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i) \varphi_j dV$

Matrices élémentaires et assemblage

Le calcul des matrices élémentaires se fait avec une transformation d'espace sur un élément maître (triangle/carré unité en 2D ou cube unité en 3D):



An illustration of the coordinate transform eT

Assemblage: sommation des matrices élémentaires de chaque élément du maillage pour former **les matrices globales** A, M et le vecteur second membre f.

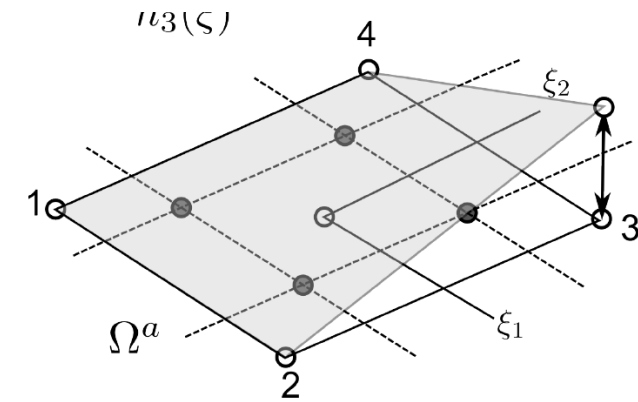
NB: Abaqus fait une renumérotation interne des éléments pour diminuer la largeur de bande des matrices.

Matrices élémentaires : intégration de Gauss-Legendre

Calcul numérique des matrices élémentaires sur l'élément maître:

intégration 1D de Gauss-Legendre à l'aide de r points de Gauss (ξ_j^i)

et r poids de Gauss ω_j^i :
$$\int_{-1}^{+1} (\cdot) d\xi_j \approx \sum_{i=1}^r \omega_j^i (\cdot) |_{\xi_j=\xi_j^i}$$



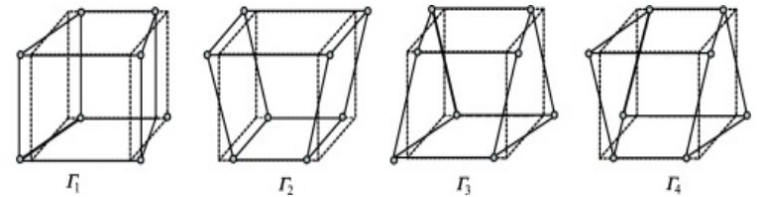
4 points de Gauss d'un élément quadrangle.

Intégration généralisée en 3D:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\cdot) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \approx \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^t \omega_1^i \omega_2^j \omega_3^k (\cdot) |_{\xi_1=\xi_1^i, \xi_2=\xi_2^j, \xi_3=\xi_3^k}$$

Les résultats EF sont exprimés :

- aux noeuds (température, déplacements, ...)
- ou aux points de Gauss (contraintes, déformation, flux, ...)



Les déplacements sont des valeurs nodales.

Modélisation / simulation aux éléments finis

- ▶ **Modèle** = **Abstraction** de la réalité dans un **but précis**
- ▶ **Expérience** = « Stimuler / perturber » un système pour en évaluer ses réponses
- ▶ **Simulation** = Expérience virtuelle = « Perturber / stimuler » un modèle du système pour en évaluer ses réponses



Un modèle devient **prédictif** quand il a été rigoureusement validé en comparant calculs et mesures (le plus de validations possibles).

Une analyse aux éléments finis consiste donc à modéliser (phénomènes physiques prépondérants), calculer, valider puis **extrapoler** à d'autres situations.

Analyse aux éléments finis

Un modèle aux EF est défini par:

- un maillage recouvrant les domaines nécessaires (nœuds, éléments et connectivité) en 1D, 2D, Axi ou 3D
- la physique du problème (thermique, thermo-mécanique, thermo-électrique, contacts ...) avec ses conditions initiales et aux limites
- le choix de fonctions de forme (linéaire, quadratique, hybride)
- les propriétés des matériaux (thermiques, élastiques, plastiques, ...)
- et les étapes de chargement (steps).

Etape primordiale: vérifier que la solution est INDEPENDANTE de la finesse du maillage : «convergence du maillage» (ni trop grossier, suffisamment fin ...).

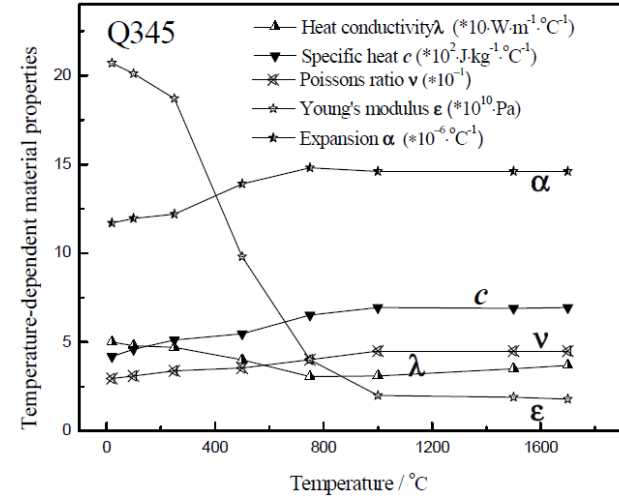
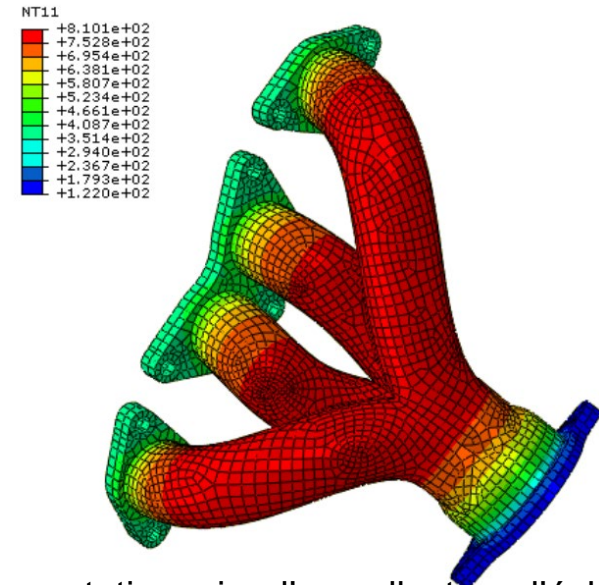


Figure 10. Temperature-dependent material properties of Q345 steel.



Champ thermique stationnaire d'un collecteur d'échappement

Modélisation et simulation aux éléments finis: inputs et outputs

Outputs:

- résultats pour un ou plusieurs cas de charge

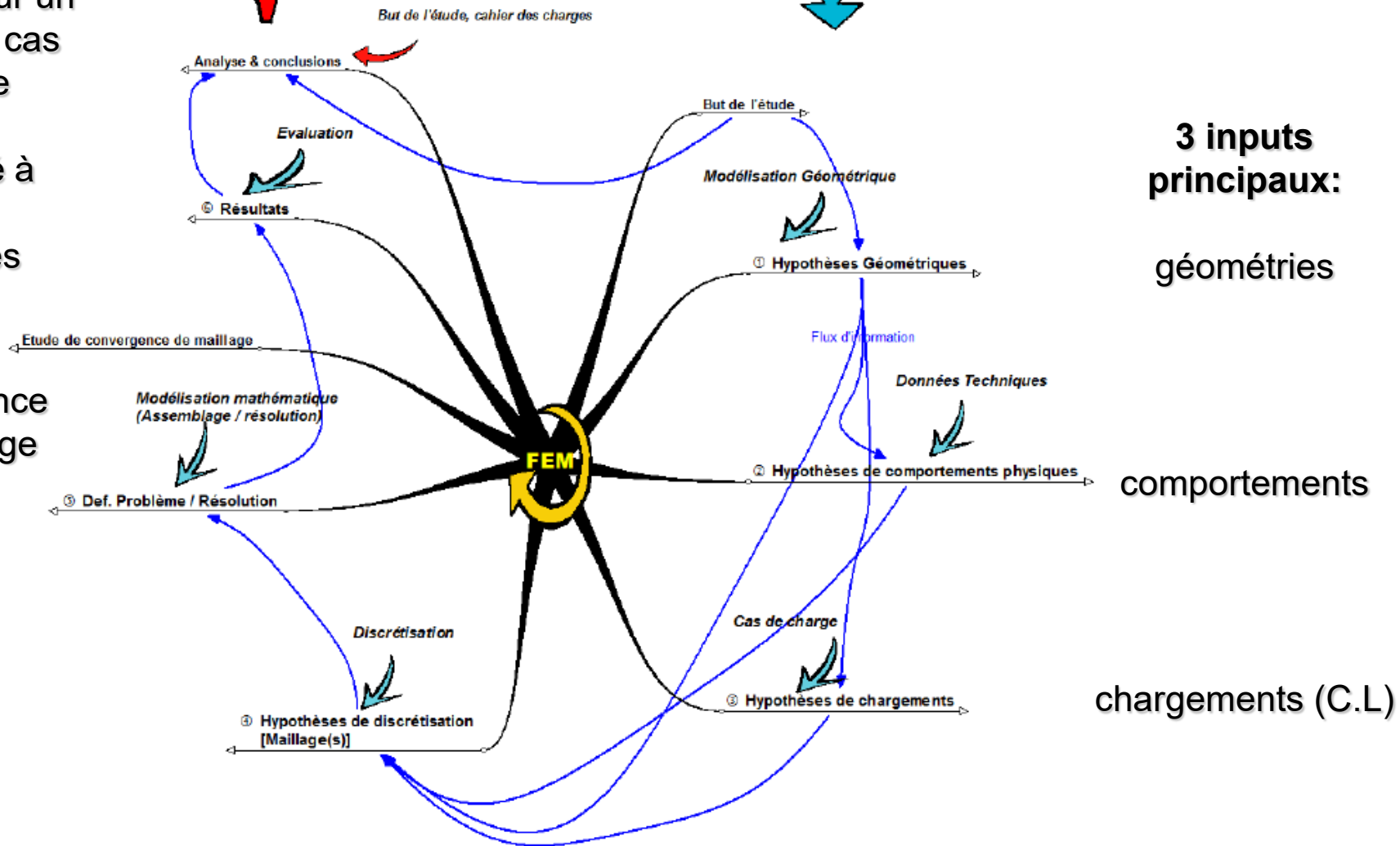
- sensibilité à certains paramètres

convergence du maillage

FINISH



START



3 inputs principaux:

géométries

comportements

chargements (C.L)

Présentation du code Abaqus

Abaqus est **LE code des chercheurs** (user routines UEL, UMAT, ...) donc il est très général et complexe à utiliser.

Il existe 2 versions:

- Abaqus standard (schéma temporel implicite donc stable) pour la statique
- Abaqus explicit (schéma temporel explicite) pour la dynamique.

Nous n'aborderons dans ce cours que Abaqus standard.

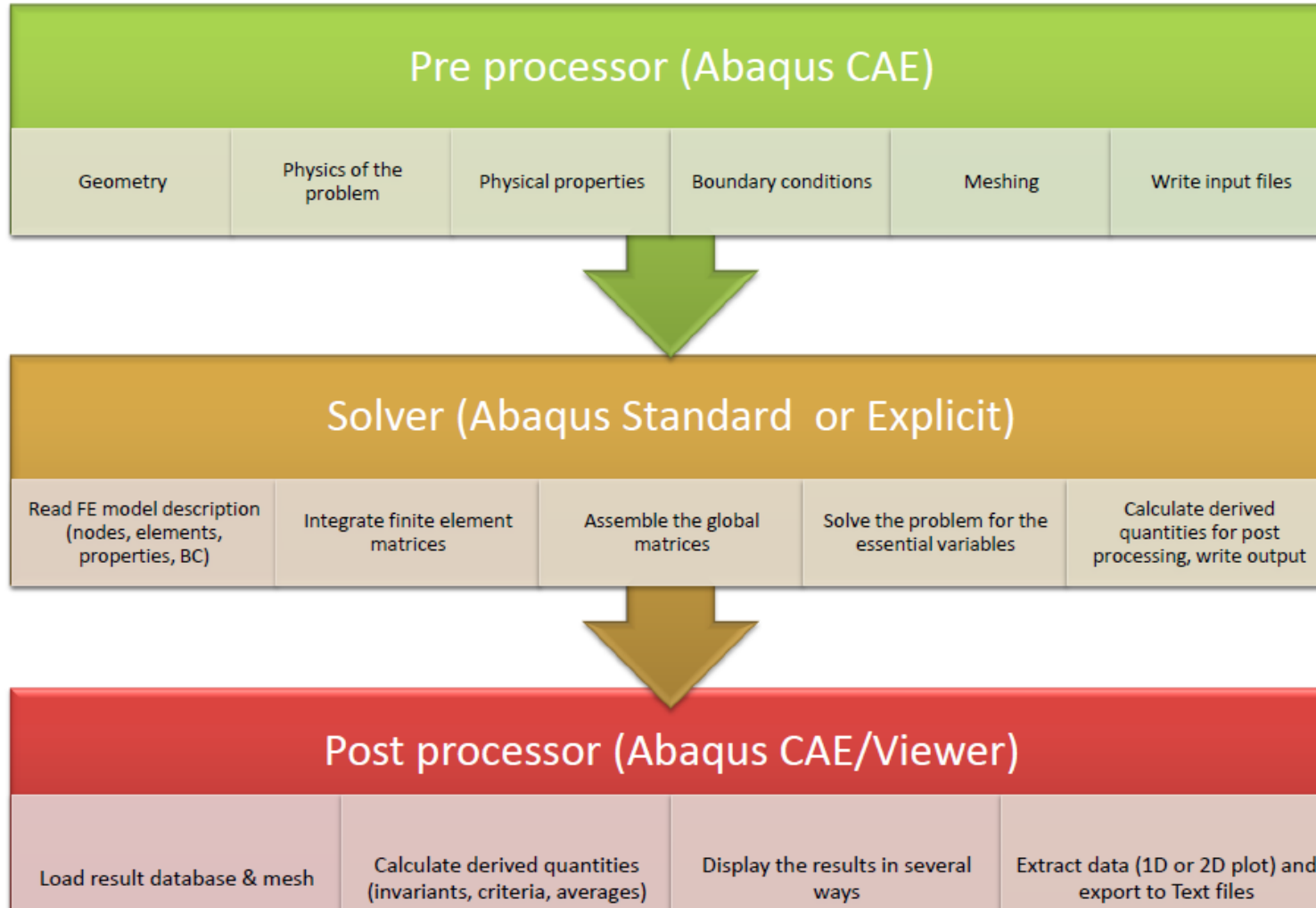
On peut travailler de 2 manières:

- **tout faire dans Abaqus cae** (dessiner la géométrie, la mailler, définir les matériaux, les BCs et les chargements, lancer le calcul et le visualiser) qui écrit un fichier input.
- **avec le fichier input (*.inp)** qui contient tout le modèle (ex. modifier seulement une pression, ...) et lancer abaqus puis visualiser les résultats avec abaqus viewer.

En pratique, on utilise les 2 approches, eg en modifiant un seul paramètre dans le *.inp lors d'une étude sensibilité.

Les éléments finis

Les 3 modules de Abaqus



Les unités dans ABAQUS

Abaqus (comme la majorité des codes de calcul EF) n'a pas d'unités. Il est de **la responsabilité de l'utilisateur** d'utiliser un système d'unité juste au sens de la physique. Les erreurs peuvent donner des résultats sans sens physique et mener à des conséquences catastrophiques.

Le mieux est d'utiliser un **système consistant** dans lequel les unités dérivées des unités fondamentales de départ s'expriment sans facteur de conversion. (Ex. mètre et Newton donneront les contraintes en Pa et les énergies en J (= 1 Nm) alors que mm et N les donneront en MPa et en mJ).

Fundamental Units: the SI system

The fundamental units used in the SI system are the following:

- Mass [M], specified in kilograms
- Length [L], specified in meters
- Time [T], specified in seconds
- Temperature [Θ], specified in degrees Kelvin (or Celsius)
- Electric current [A], specified in amperes

Les éléments finis

Ex: les unités dérivées du système SI (système consistant)

- Force (in Newtons) = MassAcceleration = ML/T^2
- Density = Mass/Volume = M/L^3
- Stress or Pressure (in Pascals) = Force/Area = $(ML/T^2)/L^2 = M/LT^2$
- Work, Energy, or Unit of Heat (in Joules) = ForceLength = ML^2/T^2
- Power (in Watts) = Energy/Time = ML^2/T^3
- Electrical Charge (in Coulombs) = CurrentTime = AT

Force : 1 N = 1 kgm/s²

Pression: 1 Pa = 1 N/m²

Énergie: 1 J = 1 Nm = 1 kgm²/s²

Les éléments finis

Exemples de systèmes consistants typiques (il en existe d'autres ...):

System:	MKS	mmNS	FPS	IPS
Length	m	mm	ft	in
Time	sec	sec	sec	sec
Mass	Kg	tonne	slug	lbf-sec ²
Force	N	N	lbf	lbf
Temperature	°C	°C	°F	°F
Area	m ²	mm ²	ft ²	in ²
Volume	m ³	mm ³	ft ³ (cu-ft)	in ³ (cu-in)
Velocity	m/sec	mm/sec	ft/sec	in/sec
Acceleration	m/sec ²	mm/sec ²	ft/sec ²	in/sec ²
Angle, rotation	rad	rad	rad	rad
Angular Velocity	rad/sec ²	rad/sec ²	rad/sec ²	rad/sec ²
Mass density	Kg/m ³	Tonne/mm ³	slug/ft ³	lbf-sec ² /in ⁴
Moment, torque	N-m	N-mm	ft-lbf	in-lbf
Line load	N/m	N/mm	lbf/ft	lbf/in
Surface load	N/m ²	N/mm ²	lbf/ft ²	lbf/in ²
Stress, pressure	Pa	MPa		Psi
Youngs modulus	Pa	MPa		Psi
Thermal exp. coef.	/°C (/K)	/°C (/K)	/°F (/K)	/°F (/K)
Beam cross-section inertia I	m ⁴	mm ⁴	ft ⁴	in ⁴
Energy, Work, Heat	J	mJ	ft-lbf	in-lbf
Power, heat transfer rate Q̇	W	mW	ft-lbf/sec	in-lbf/sec
Temperature gradient	°C/m	°C/mm	°F/ft	°F/in
Heat flux	W/m ²	mW/mm ²	lbf/ft-sec	lbf/in-sec
Therm. conductivity	W/m-°C	mW/mm-°C	lbf/sec-°F	lbf/sec-°F
Specific heat C _p	J/Kg-°C	mJ/tonne-°C	ft-lbf/slug-°F	in ² /sec ² -°F

Système mmNs:

Force :

1 N = 1 tonne.mm/s² =
1Kg.m/s² **donc masse
en tonne.**

Energie :

1 Nmm = 1mJ (= mm.tonne.mm/s² =
1 t.mm²/s²) **donc énergie
en mJ (milliJoule)**

Pression:

1 N/mm² = 1 MPa **donc
pression en MPa**

Les éléments finis

Correspondance entre systèmes consistants:

	SI (m, k, s)	Metric (mm, k, s)	Metric (cm, g, s)
Time	second (s)	second (s)	second (s)
Length meter	1 meter (m)	1000 millimeter (mm)	100 centimeter (cm)
Velocity	1 m/s	1000 mm/s	100 cm/s
Acceleration	1 m/s ²	1000 mm/s ²	100 cm/s ²
Mass	1 kilogram (kg)	1.0e-3 tonnes	1000 gram (g)
Density	1 kg/m ³	1.0e-12 tonnes/mm ³	1.0e-3 g/cm ³
Force	1 Newton (N)	1 Newton (N)	1.0e5 dyne (dyn)
Moment	1 N · m	1000 N · mm	1.0e7 dyn · cm
Stress/Pressure	1 Pascal (Pa)	1.0e-6 N/mm ²	10 dyn/cm ²
Energy	1 Joule (J)	1000 millijoule (mJ)	1.0e7 erg
Power	1 Watt (W)	1000 milliwatt	1.0e7 erg/s

En cas de doute, utiliser le SI.

Lors de l'importation d'une géométrie CAD (en général en mm) dans abaqus, les unités peuvent être modifiées: vérifier les bonnes unités dans Abaqus à l'aide de Tool/Query/Distance.

Les éléments finis

Si votre système n'est pas consistant, il apparait des facteurs de conversion.

Exemple de la thermique:

***** units: kg, mm, J, s, K **n'est pas consistant** car dans ce cas l'énergie devrait être en MJ ($1 \text{ N} = 1 \text{ Kg.m/s}^2 = 10^3 \text{ Kg.mm/s}^2$ et $= 1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 10^3 \text{ mKg.mm/s}^2 = 10^6 \text{ Kg.mm}^2/\text{s}^2$)

On peut décider de **conserver le Joule (et non le MJ)** mais des facteurs de conversion apparaissent chaque fois que l'énergie apparait (dans $W = J/s$, par exemple):

*dflux

***** $10 \text{ MW/m}^3 = 10.e6 \times 1.e-9 \text{ W/mm}^3 = 10.e-3 \text{ W/mm}^3 = 0.01 \text{ W/mm}^3$

eall,bf,10.e-3

*film

***** condition mixte: $\text{flux} = h \cdot (t_s - t_{ex})$

***** h en $\text{W/mm}^2\text{K}$, $1 \text{ W/m}^2\text{K} = 1.e-6 \text{ W/mm}^2\text{K}$

** element set, film, tex, h

ein,f4,100.,5000.e-6

eout,f2,20.,500.e-6

Les éléments finis

Si votre système n'est pas consistant, il apparait des facteurs de conversion.

Exemple de la mécanique:

***** units: mm, N, kg, s, MPa **n'est pas consistant** car dans ce cas la masse devrait être en tonne.

On peut décider de conserver le Kg ou la tonne mais des facteurs de conversion apparaissent:

*density

***** en kg/mm³

2700.e-9

***** en t/mm³

2.7e-9

*dload

***** gravité en N/kg

eall,grav,10.,0,-1,0

***** gravité en N/t

10.e3

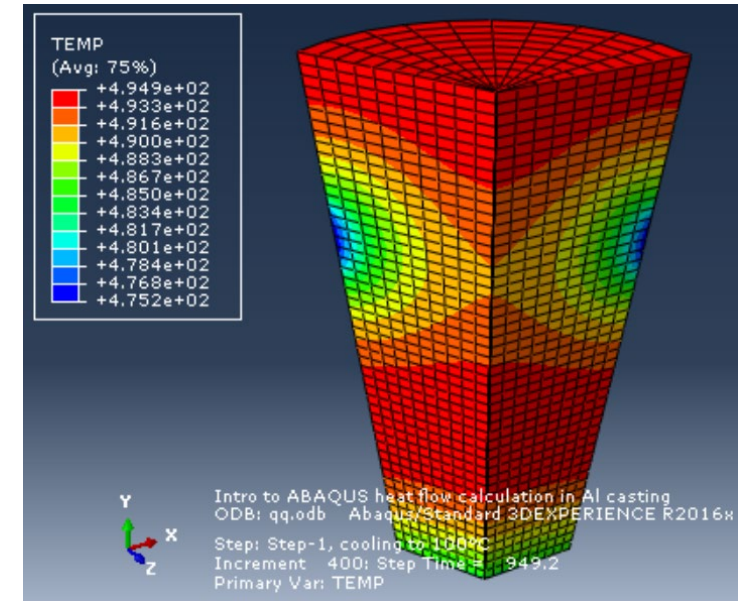
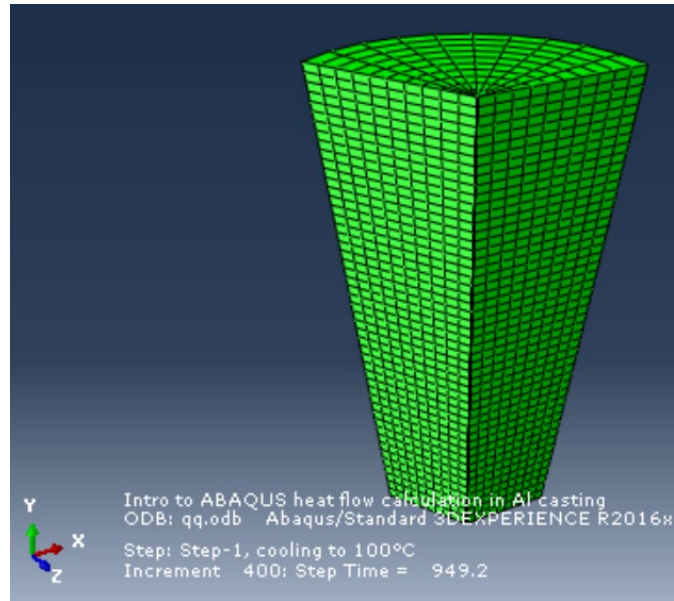
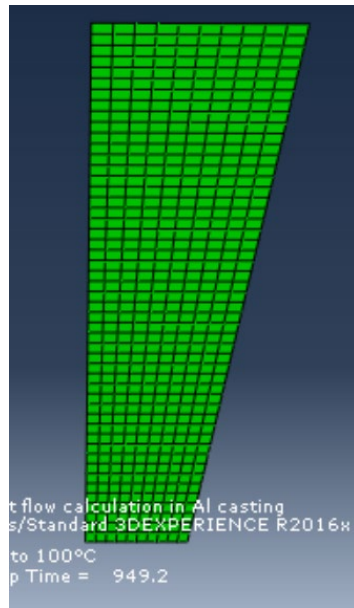
NB: la densité volumique de force (produit rho.g) est bien conservée:

27.e-6 N/mm³

27.e-6 N/mm³

Cours 8: mercredi 19 Nov 25 en salle informatique MXF-014

Cas de thermique transitoire sur Abaqus: refroidissement d'une pièce axisymétrique.



La géométrie et les C.L sont axisymétriques: on travaille en coordonnées cylindriques

Mercredi 12 Novembre: propé1 de 15h15 à 17h30 (aucun document), présence obligatoire (examen)
NB: 1/3 temps supplémentaire pour 3 étudiants (18h15)

Mercredi 19 Novembre : correction du propé1
et un cas de thermique dans abaqus