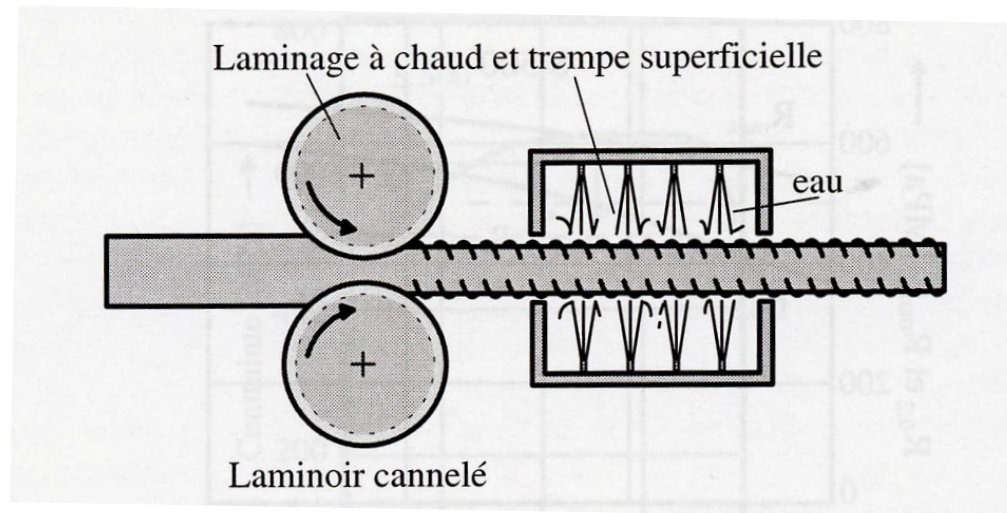


# Cours 6

## Problèmes de convection-diffusion stationnaire 1D et 2D et éléments finis

**Un exemple** : champs thermique stationnaire (approche eulérienne) d'un traitement continu de durcissement surfacique d'un acier par trempe superficielle.



Approche eulérienne:  $T(x,y)$  en régime stationnaire avec refroidissement surfacique

$$\rho C_p \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T - k \Delta T = 0 \quad \text{avec} \quad \vec{V} = V \vec{e}_x$$

# Problème 1D de convection-diffusion et éléments finis

Soit  $f : x \in [0, 1] \rightarrow f(x) \in \mathbb{R}$  et  $c : x \in [0, 1] \rightarrow c(x) \in \mathbb{R}$  deux fonctions continues données et soit  $\varepsilon > 0$  fixé. Nous cherchons une fonction  $u : x \in [0, 1] \rightarrow u(x) \in \mathbb{R}$  satisfaisant

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) &= f(x) & \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{14.1}$$

Le problème (14.1) est appelé problème de *convection-diffusion stationnaire*. Le terme de diffusion est  $-\varepsilon u''(x)$  alors que le terme de convection est  $c(x)u'(x)$ . La fonction  $c(x)$  est la vitesse.

Ex1: conservation du soluté de concentration  $c(x)$  stationnaire ( $v(x)$ =vitesse):

$$V(x) \cdot \nabla c + \operatorname{div}(-D \nabla c) = 0 \quad \text{avec } D \text{ en m}^2/\text{s} \text{ (coefficient de diffusion)}$$

Ex2: conservation de l'énergie  $T(x)$  en régime stationnaire avec terme de source:

$$\rho C_p V(x) \cdot \nabla T - k \Delta T = Q_T$$

# Problème 1D de convection-diffusion: couche limite

Cas  $c = c_0 =$  vitesse cste et  $f = f_0 =$  cste :  $-\varepsilon u''(x) + c_0 u'(x) = f_0$  avec  $u(0) = u(1) = 0$ .

Solution particulière:  $u = ax$  donne  $a = f_0 / c_0$

Solution homogène:  $-\varepsilon u''(x) + c_0 u'(x) = 0$  donne  $u'(x) = B e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x}$ ,  $u(x) = A + B \frac{\varepsilon}{c_0} e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x}$

Solution générale:  $u = A + B \frac{\varepsilon}{c_0} e^{\frac{c_0}{\varepsilon} x} + f_0 x / c_0$

$u(0) = A + \frac{\varepsilon}{c_0} B = 0$ . et  $u(1) = A + B \frac{\varepsilon}{c_0} e^{\frac{c_0}{\varepsilon}} + f_0 / c_0 = 0$ .

soit  $B = f_0 / \varepsilon \left( 1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}} \right)$  et  $A = -\frac{\varepsilon}{c_0} B$

soit  $u(x) = \frac{f_0}{c_0} \left( x - \frac{1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon} x}}{1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}}} \right)$

# Problèmes de convection-diffusion: couche limite

$$u(x) = \frac{f_0}{c_0} \left( x - \frac{1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon} x}}{1 - e^{-\frac{c_0}{\varepsilon}}} \right) = \frac{f_0}{c_0} \left( x - \frac{1 - e^{-x/\delta}}{1 - e^{-1/\delta}} \right) \text{ avec } \delta = \varepsilon/c_0 \text{ [m]}$$

si  $c_0 > 0$  et  $\frac{c_0}{\varepsilon}$  est très grand (convection très grande devant la diffusion),

alors  $\delta$  est très petit et  $u(x) = x \frac{f_0}{c_0}$  pour  $x \leq 1 - \delta$

$u(x)$  redescend vers 0 en  $x = 1$  sur une couche limite  $\delta$

Cette couche limite  $\delta$  est d'autant plus fine que  $\frac{c_0}{\varepsilon}$  est grand

exemple pour thermique dans l'Aluminium:

$$\rho C_p V \cdot \nabla T - k \Delta T = \dot{Q}_T \text{ avec } V = c_0 \geq 0.$$

$$-\varepsilon \Delta T + V \cdot \nabla T = \frac{1}{\rho C_p} \dot{Q}_T \text{ avec } V = c_0 \text{ et } \varepsilon = \frac{k}{\rho C_p}, \text{ diffusivité thermique}$$

Couche limite pour l'Alu:  $\varepsilon = 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$

si  $c_0 = 1 \text{ m/s}$ ,  $\delta = \varepsilon / c_0 = 10^{-4} \text{ m} = 100 \mu\text{m}$

si  $c_0 = 1 \text{ mm/s}$ ,  $\delta = \varepsilon / c_0 = 10^{-1} \text{ m} = 10 \text{ cm}$

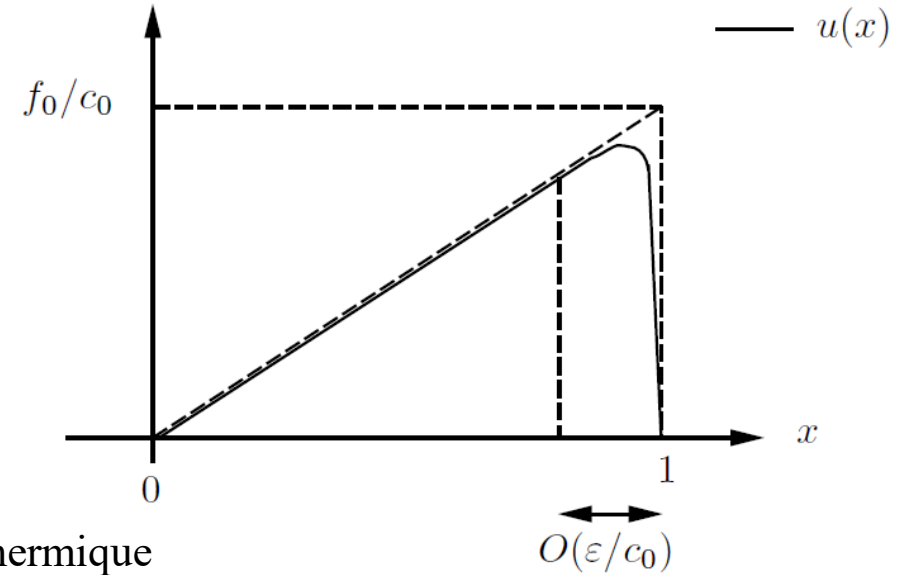
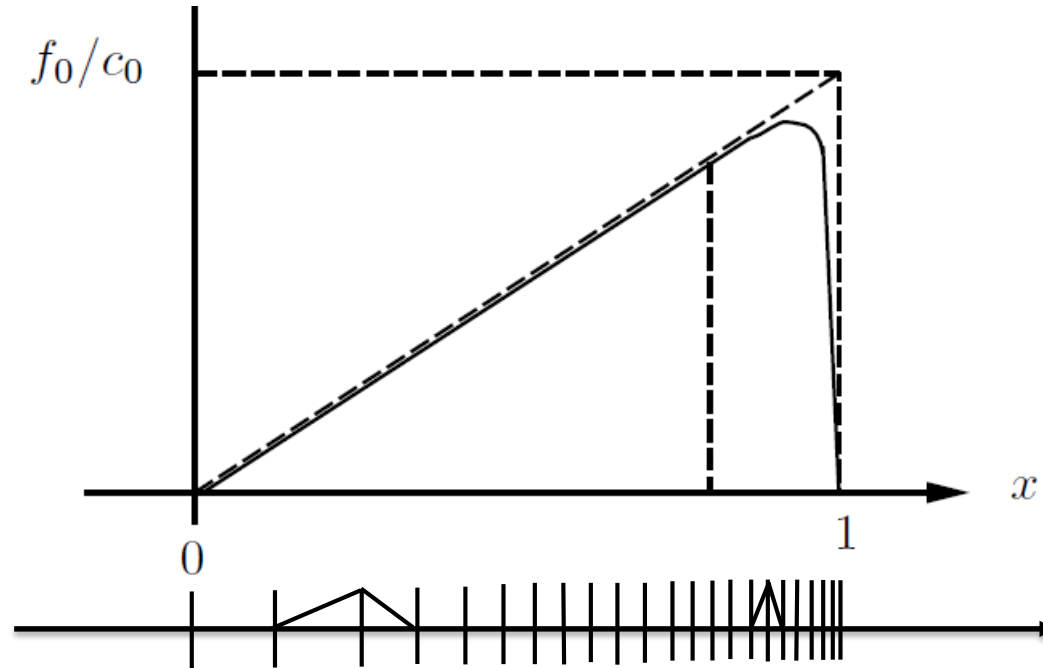


Fig. 14.1 Solution  $u(x)$  lorsque  $\varepsilon \ll c_0$ .

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

2 stratégies de résolution numérique pour “capturer” cette couche limite:

- affiner les éléments finis en approchant  $x = 1$  (intérêt des EF comparés aux différences finies ...)
- ou utiliser des fonctions d'interpolation présentant un upwind (SUPG, streamline upwind Petrov-Galerkin, éléments dccax4 dans abaqus).



Abaqus: \*ngen, bias = 1.1 (progression géométrique de raison 1.1)

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Résolution numérique 1D par les éléments finis

$$\begin{aligned} -\varepsilon u''(x) + c(x)u'(x) &= f(x) \quad \forall x \in ]0, 1[, \\ u(0) &= u(1) = 0. \end{aligned}$$

**Formulation faible:** on multiplie par  $v(x)$  continue, de première dérivée  $v'(x)$  continue par morceaux sur  $[0, 1]$  et telle que  $v(0)=v(1)=0$ .

L'ensemble  $V$  de ces fonctions  $v$  est un e.v de dimension infini.  
On obtient la formulation faible du problème:

Nous cherchons une fonction  $u \in V$  telle que :

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^1 u'(x)v'(x)dx + \int_0^1 c(x)u'(x)v(x)dx \\ = \int_0^1 f(x)v(x)dx \quad \forall v \in V. \end{aligned}$$

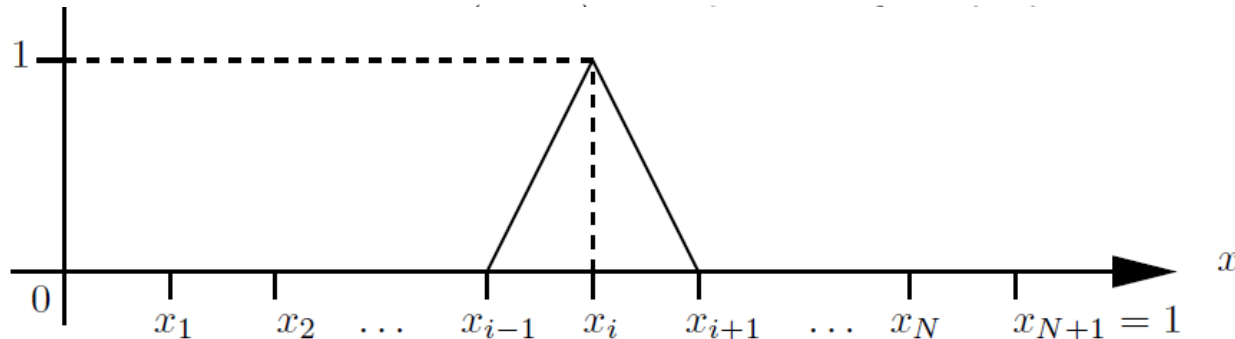
# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Eléments finis linéaires 1D: fonctions chapeaux

Soit  $N$  points  $x_1, \dots, x_N$  situés à l'intérieur de l'intervalle  $[0, 1]$  tels que  $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N < 1 = x_{N+1}$ . Considérons les  $N$  fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  définies de la façon suivante :

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{x_j - x_{j-1}} & \text{si } x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x - x_{j+1}}{x_j - x_{j+1}} & \text{si } x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0 & \text{si } x \notin [x_{j-1}, x_{j+1}]. \end{cases}$$

Les fonctions  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  appartiennent à l'espace  $V$  et sont linéairement indépendantes. Soit  $V_h$  l'espace engendré par les combinaisons linéaires de  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ .



# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Résolution avec les éléments finis linéaires (fonctions chapeau)

On cherche  $u_h \in V_h$  tel que pour tout  $v_h$  de  $V_h$ , on ait

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_0^1 u_h'(x) v_h'(x) dx + \int_0^1 c(x) u_h'(x) v_h(x) dx \\ = \int_0^1 f(x) v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

Exprimons  $u_h$  comme combinaison linéaire de  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$ , c'est-à-dire

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x) \quad \forall x \in [0, 1],$$

Cela revient à chercher  $u_1, u_2, \dots, u_N$  tels que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left( \varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx \\ = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires:

Il faut résoudre le système  $A\vec{u} = \vec{f}$  avec :

$$A_{ji} = \int_0^1 \left( \varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx, \quad i, j = 1, \dots, N,$$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

où  $c(x) = c_0 = \text{constante}$ ,  $f(x) = f_0 = \text{constante}$  et lorsque les points  $x_1, \dots, x_N$  sont uniformément répartis ( $h = 1/(N + 1)$  et  $x_j = jh$ ,

**Attention :  $A_{ij} \neq A_{ji}$  (sauf si  $c(x) = 0$ ) !!**

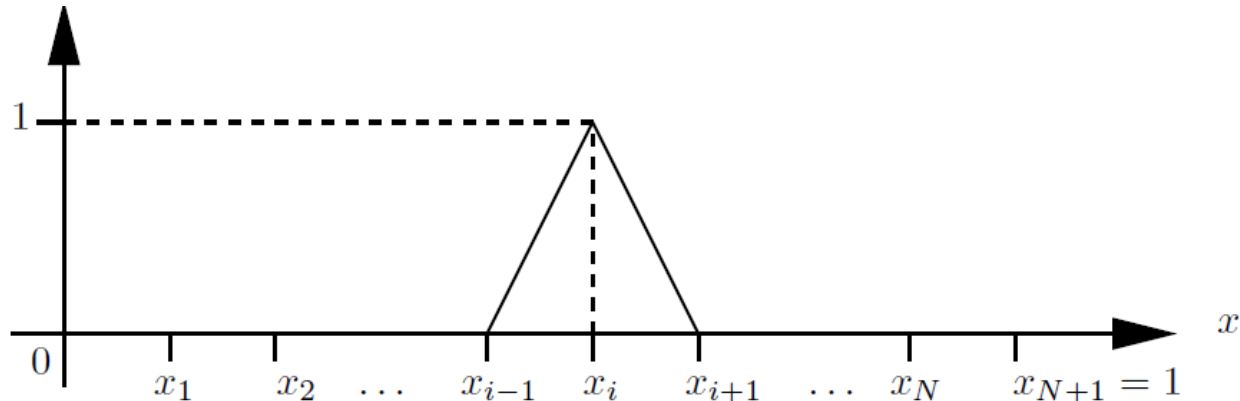
# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires et un maillage régulier:

$$\text{Termes diagonaux } A_{ii} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx$$

$$A_{ii} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \frac{\varepsilon}{h^2} dx + \frac{c_0}{h} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx - \frac{c_0}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i dx$$

$$A_{ii} = \frac{2h\varepsilon}{h^2} = \frac{2\varepsilon}{h}$$



# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires et un maillage régulier:

Calcul des  $A_{i,i+1}$  et  $f_j$  avec  $f(x) = f_0 = \text{cste}$

$$A_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx$$

$$A_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon \left( \frac{-1}{h} \right) \frac{1}{h} dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c_0 \varphi_i \frac{1}{h} dx$$

$$A_{i,i+1} = \varepsilon \left( \frac{-1}{h^2} \right) h + \frac{c_0}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i dx$$

$$A_{i,i+1} = \frac{-\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{h} \frac{h}{2} = \frac{-\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{2}$$

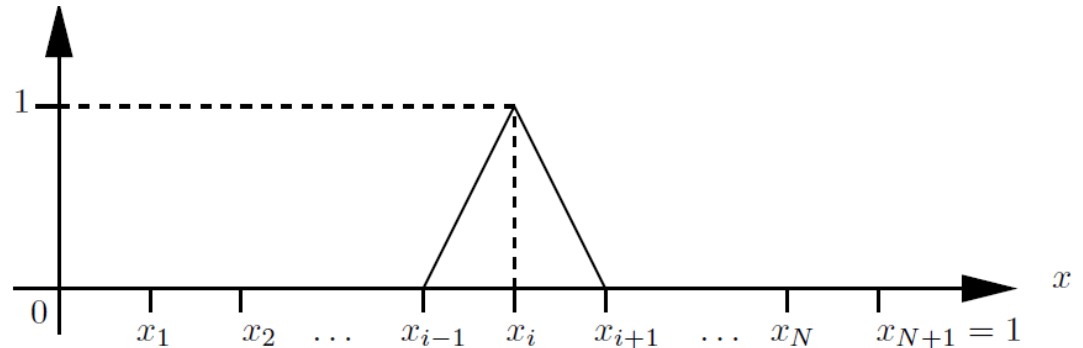
De même, on montre que (exo 6a):

$$A_{i-1,i} = \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{h} \frac{h}{2} = \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2}$$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

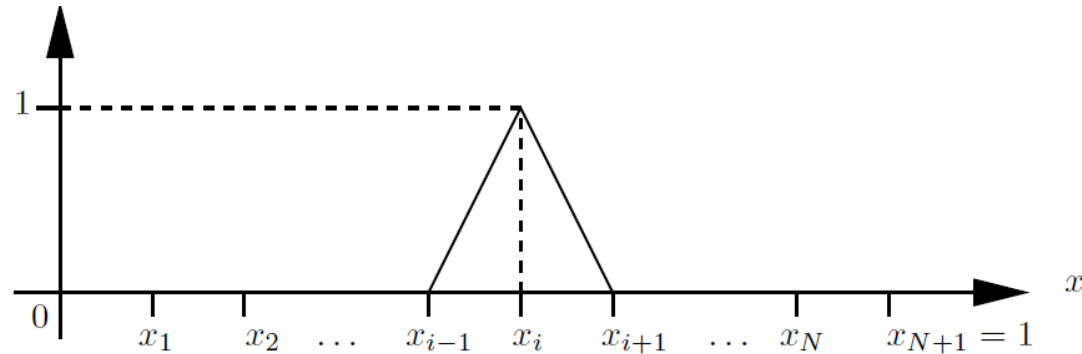
$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx = f_0 \int_{x_{j-1}}^{x_j} \varphi_j(x) dx + f_0 \int_{x_j}^{x_{j+1}} \varphi_j(x) dx$$

$$f_j = f_0 \left( \frac{h}{2} + \frac{h}{2} \right) = hf_0$$



# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

**Exo 6a:** montrer que  $A_{i,i-1} = -\varepsilon/h - c_0/2$  et  $f_j = h f_0$  avec  $f(x) = f_0 = \text{cste}$  et  $c(x)=c_0$  pour le pb de convection-diffusion 1D avec des fonctions linéaires (fonctions chapeaux).



$$A_{ji} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_j' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_j \varphi_i' dx$$

$$f_j = \int_0^1 f(x) \varphi_j(x) dx, \quad j = 1, \dots, N.$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 1D avec des éléments finis linéaires:

$A\vec{u} = \vec{f}$  avec  $A$  matrice  $N \times N$  tridiagonale (de largeur de bande 3)

**non symétrique** à cause du terme de transport  $c_0$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2\varepsilon}{h} & -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{2} & & & \\ -\frac{\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2} & \ddots & & \ddots & \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & & -\frac{\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2} & -\frac{\varepsilon}{h} + \frac{c_0}{2} \\ & & & & \frac{2\varepsilon}{h} \end{bmatrix}$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

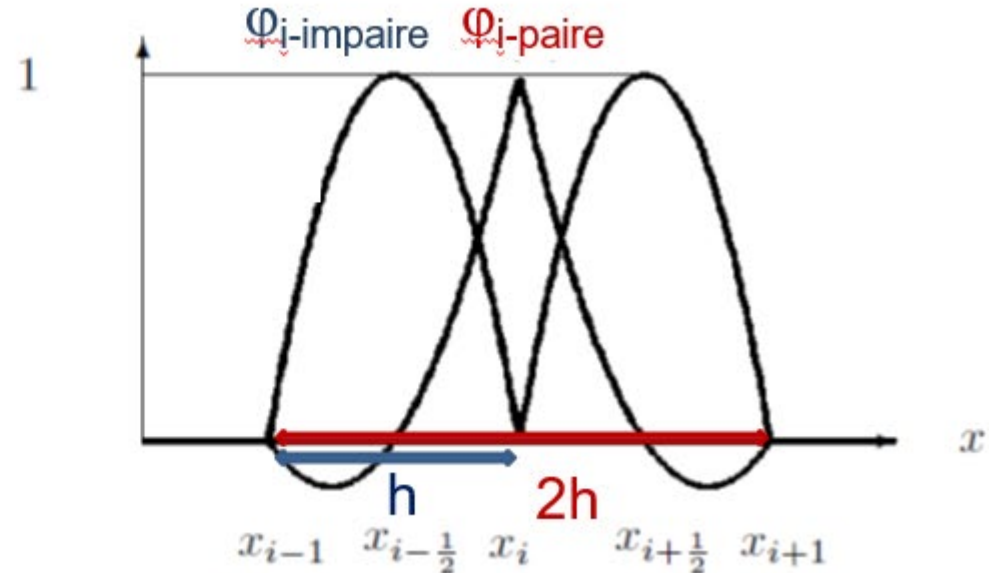
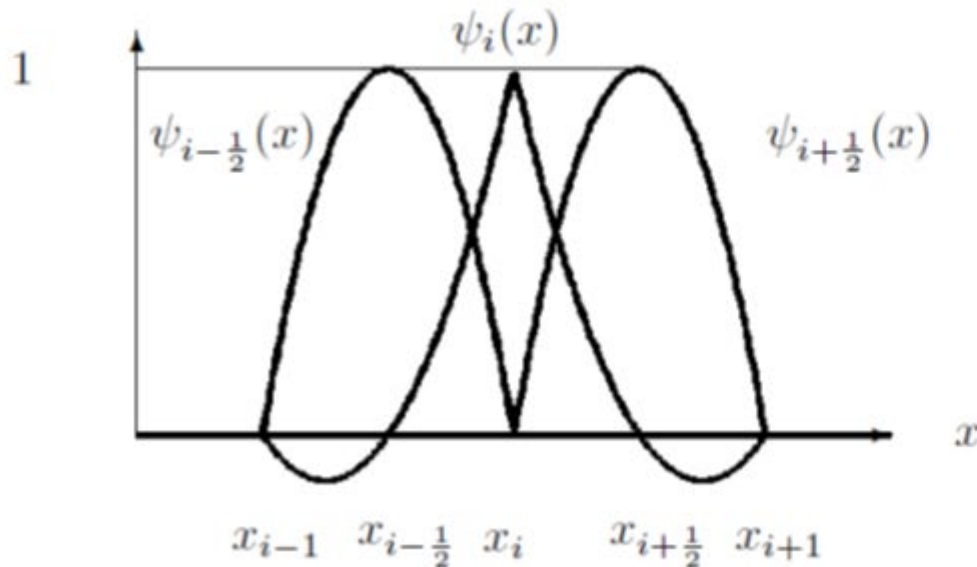
## Éléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

La matrice  $A$  n'est pas symétrique mais elle est pentadiagonale.

De plus pour  $i$  impair,  $A_{i,i-2} = A_{i,i+2} = 0$  ce qui n'est pas le cas pour  $i$  pair.

$$A_{ji} = \int_0^1 \left( \varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx,$$

$$\text{Termes diagonaux } A_{ii, i \text{ impair}} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx$$



# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Éléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

**Termes diagonaux**  $A_{ii} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_i' dx$  pour  $i$  impair

$i$  impair:  $\varphi_i(x) = \psi_{i+1/2}(x) = \frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh}$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

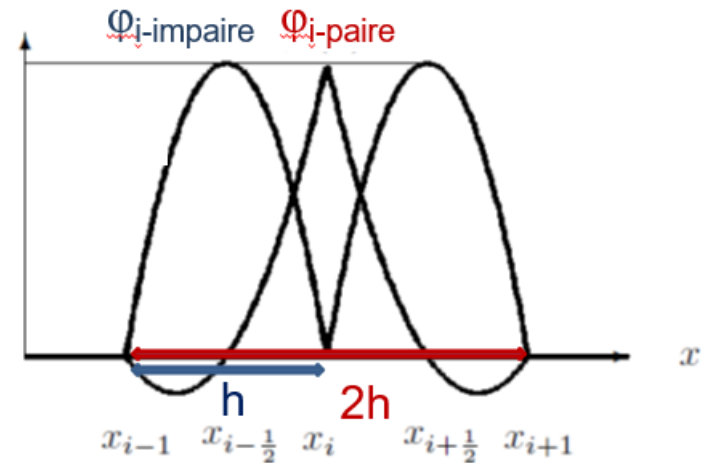
et  $\varphi_i'(x) = \frac{-4(2x-x_i-x_{i+1})}{hh}$  sur  $[x_i, x_{i+1}]$

$A_{ii}$  ( $i$  impair) =  $\frac{16\varepsilon}{h^4} \int_0^h (u-h+u)^2 du + \frac{16}{h^4} c_0 \int_0^h u(u-h)(2u-h) du$  avec  $u = x-x_i = x-x_{i+1}+h$

$A_{ii}$  ( $i$  impair) =  $\frac{16\varepsilon}{h^4} \frac{1}{6} [(2u-h)^3]_0^h + \frac{16}{h^4} c_0 \int_0^h (2u^3 - 3hu^2 + h^2u) du$

$A_{ii}$  ( $i$  impair) =  $\frac{16\varepsilon}{h^4} \frac{1}{6} [h^3 + h^3] + \frac{16c_0}{h^4} \left[ 2 \frac{u^4}{4} - hu^3 + \frac{h^2u^2}{2} \right]_0^h$

$A_{ii}$  ( $i$  impair) =  $\frac{16\varepsilon}{h} \frac{1}{3} + 16c_0 \left[ \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} \right] = \frac{16\varepsilon}{3h}$



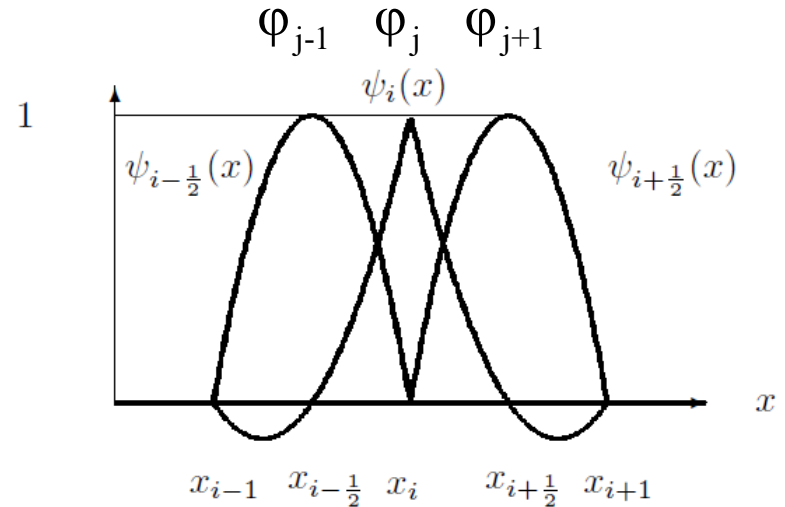
# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Éléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

**Exo 6b :** calculer les termes diagonaux

$$A_{i,i} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i' \varphi_i dx \quad \text{pour } i \text{ pair}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}; \end{cases}$$



# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Éléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

$$A_{ji} = \int_0^1 \left( \varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx \quad \psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

Termes  $\mathbf{A}_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx$  **pour i pair**

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}; \end{cases}$$

i pair: le support commun entre  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1}$  est  $[x_i, x_{i+1}]$

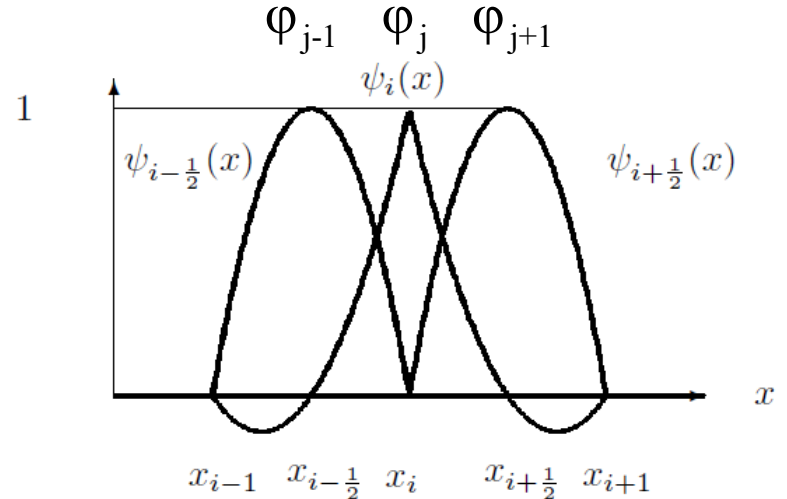
sur  $[x_i, x_{i+1}]$ :

$$\varphi_i(x) = \frac{2(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{hh} = \frac{2(u-h)(u-h/2)}{hh} \text{ avec } u = x - x_i$$

$$\varphi_i'(x) = \frac{2(u-h/2)+2(u-h)}{hh} = \frac{4u-3h}{hh}$$

$$\varphi_{i+1}(x) = \psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh} = \frac{-4u(u-h)}{hh}$$

$$\text{et } \varphi_{i+1}'(x) = \frac{-4(u-h)-4u}{hh} = \frac{-8u+4h}{hh}$$



# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Éléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

$$\text{Termes } \mathbf{A}_{i,i+1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx \text{ pour } i \text{ pair}$$

$i$  pair: le support commun entre  $\varphi_i$  et  $\varphi_{i+1}$  est  $[x_i, x_{i+1}]$ , on pose  $u = x - x_i$

$$\mathbf{A}_{i,i+1} = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i+1}' dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c_0 \varphi_i \varphi_{i+1}' dx$$

$$\mathbf{A}_{i,i+1} = \frac{\varepsilon}{h^4} \int_0^h (4u-3h)(-8u+4h) du + \frac{c_0}{h^4} \int_0^h (u-h)(2u-h)(-8u+4h) du$$

$$\mathbf{A}_{i,i+1} = \frac{\varepsilon}{h^4} \int_0^h (-32u^2 + 40uh - 12h^2) du + \frac{c_0}{h^4} \int_0^h (-16u^3 + 32u^2h - 20h^2u + 4h^3) du$$

$$\mathbf{A}_{i,i+1} = \frac{\varepsilon}{h^4} \left[ -32u^3/3 + 20u^2h - 12uh^2 \right]_0^h + \frac{c_0}{h^4} \left[ -4u^4 + 32u^3h/3 - 10h^2u^2 + 4uh^3 \right]_0^h$$

$$\mathbf{A}_{i,i+1} = \frac{\varepsilon}{h} (-32/3 + 20 - 12) + c_0 (-4 + 32/3 - 10 + 4) = \frac{\varepsilon}{h} (-32/3 + 8) + c_0 (32/3 - 10)$$

$$\mathbf{A}_{i,i+1} = \frac{\varepsilon}{h} (-32/3 + 20 - 12) + c_0 (-4 + 32/3 - 10 + 4) = -\frac{8\varepsilon}{3h} + \frac{2}{3}c_0$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

## Éléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

$$A_{ji} = \int_0^1 \left( \varepsilon \varphi_i'(x) \varphi_j'(x) + c(x) \varphi_i'(x) \varphi_j(x) \right) dx$$

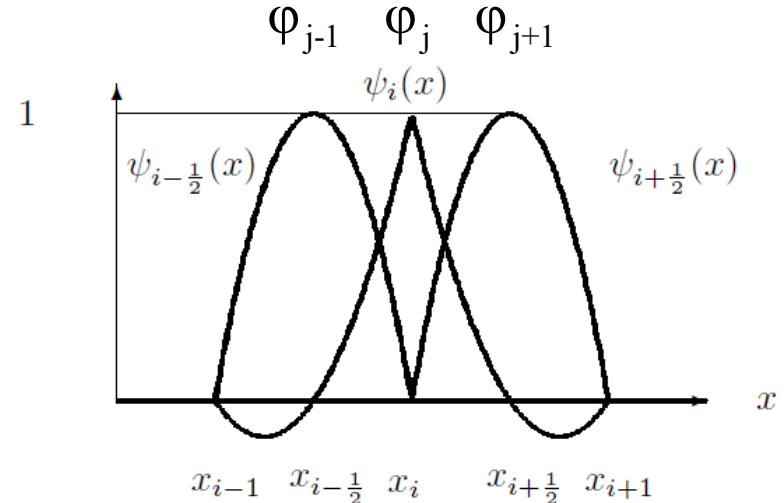
Pour  $i$  impair,  $\mathbf{A}_{i,i-2} = 0$  et  $\mathbf{A}_{i,i+2} = 0$   
 mais pas pour  $i$  pair !

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_i \text{ ou } x \geq x_{i+1}. \end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \frac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \leq x_{i-1} \text{ ou } x \geq x_{i+1}; \end{cases}$$

exo 6c :

Calculez  $\mathbf{A}_{i,i-1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_{i-1}' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi_{i-1}' dx$  pour  $i$  pair



# Problème 2D de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 2D d'un pb de **convection-diffusion transitoire**:

Soit  $\Omega$  un domaine polygonal dans le plan  $Ox_1x_2$ , de frontière  $\partial\Omega$  et soit  $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ . Nous nous donnons une fonction  $f : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x, t) \in \mathbb{R}$ , une fonction vectorielle  $\vec{c} : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \vec{c}(x, t) \in \mathbb{R}^2$ , un nombre positif  $\varepsilon$  et une fonction  $w : x \in \overline{\Omega} \rightarrow w(x) \in \mathbb{R}$ . Dès lors, nous posons le problème de chercher une fonction  $u : (x, t) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow u(x, t) \in \mathbb{R}$  telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \varepsilon \Delta u(x, t) + \vec{c}(x, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} u(x, t) \\ &= f(x, t) & \forall x \in \Omega, \quad \forall t > 0, \\ u(x, t) &= 0 & \forall x \in \partial\Omega \quad \forall t > 0, \\ u(x, 0) &= w(x) & \forall x \in \Omega, \end{aligned} \quad (14.24)$$

$\vec{c}(x, y, t) = \vec{v}(x, y, t)$  est le champ connu de vitesse

Ex: pb de la chaleur dans un fluide en mouvement: convection et diffusion

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{V}(x, y, t) \cdot \vec{\nabla} T - \frac{k}{\rho C_p} \Delta T = \frac{1}{\rho C_p} \dot{Q}_T(x, y, t)$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Résolution numérique 2D d'un pb de convection-diffusion transitoire:

Triangulation du carré unité et définition de 16 fonctions chapeau localise sur les 16 points intérieurs du carré (points  $P_i$  et  $h = 1/5$ )

la solution approchée  $u_h(x,t)$  est projetée sur la base des  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  à chaque  $t > 0$  :

$$u_h(x,t) = u_i(t)\varphi_i(x) = \sum_{i=1}^{N=16} u_i(t)\varphi_i(x)$$

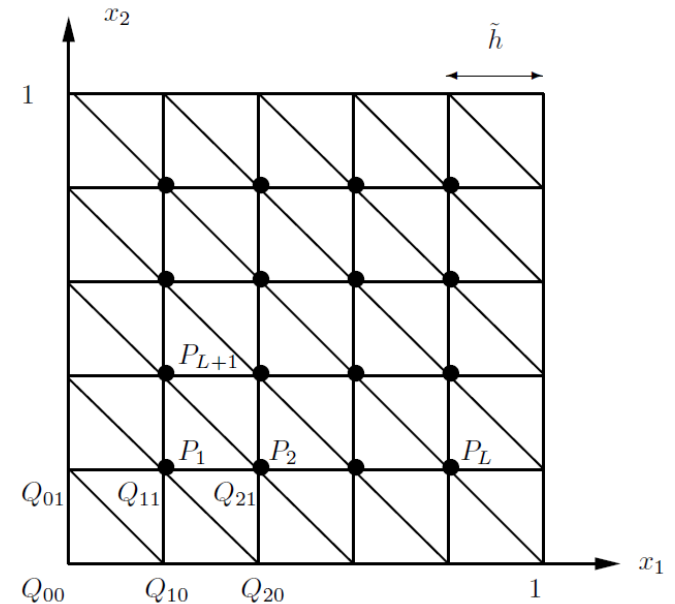


Fig. 11.4 Le carré unité et sa triangulation pour  $L = 4$ .

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Cela revient à chercher  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_N(t)$  tels que pour tout  $j=1$  à  $N$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \dot{u}_i(t) \iint_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx + \varepsilon \sum_{i=1}^N u_i(t) \iint_{\Omega} \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(x) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_j(x) dx \\ + \sum_{i=1}^N u_i(t) \iint_{\Omega} \left( \vec{c}(x, t) \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi_i(x) \right) \varphi_j(x) dx = \iint_{\Omega} f(x, t) \varphi_j(x) dx, \end{aligned}$$

On obtient la discrétisation spatiale:

$$M \dot{\vec{u}} + A \vec{u} = \vec{f} \quad \text{avec} \quad M = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dV$$

$$\text{et} \quad A_{ji} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_i \cdot \nabla \varphi_j dV + \int_{\Omega} \left( \vec{c}(x, t) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i \right) \varphi_j dV$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Carré unité avec  $L = 4$

Matrice de masse  $M$ ,  $M_{ij} = \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dV$  est nona-diagonale.

Sa demi-largeur de bande est 4.

$$M = \frac{\tilde{h}^2}{12} \begin{bmatrix} \tilde{B} & \tilde{C} & & \\ \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} & \\ & \tilde{C}^T & \tilde{B} & \tilde{C} \\ & & \tilde{C}^T & \tilde{B} \end{bmatrix},$$

où nous avons noté

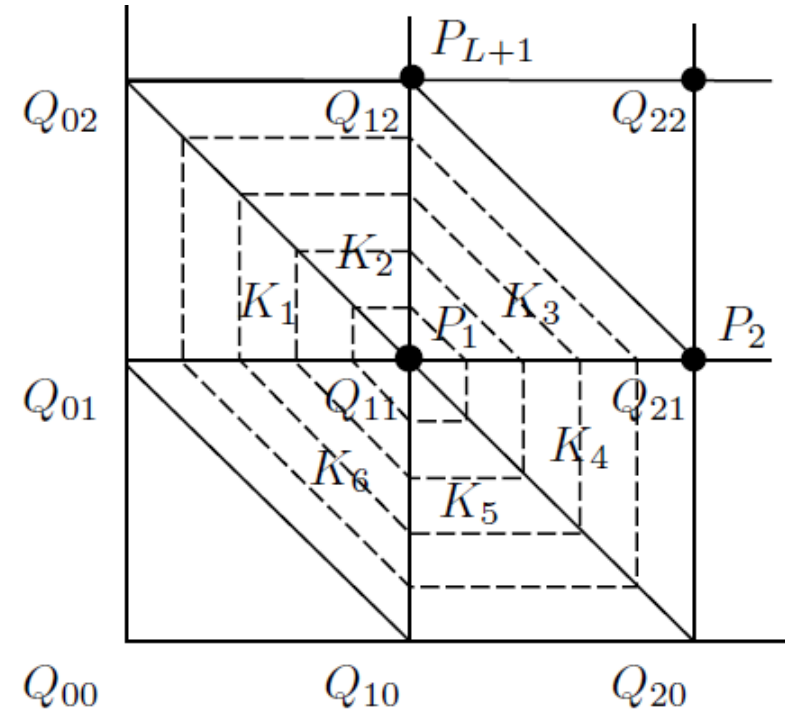
$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & & \\ 1 & 6 & 1 & \\ & 1 & 6 & 1 \\ & & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

# Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

**Exo 6d** : dans le pb de convection-diffusion 2D, montrer que les termes diagonaux  $A_{ii}$  valent  $4\varepsilon$  si la vitesse  $c(x)$  est donnée par:

$$\vec{c}(x,t) = c_o(t) \vec{u}_y$$

$$A_{ji} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \varphi_i \nabla \varphi_j dV + \int_{\Omega} (\vec{c}(x,t) \cdot \vec{\nabla} \varphi_i) \varphi_j dV$$



Mercredi 5 Novembre: correction des exos 6 et introduction  
à abaqus

Mercredi 12 Novembre: propé1 de 15h15 à 16h30 (aucun  
document), présence obligatoire (examen)  
NB: 1/3 temps supplémentaire pour 3 étudiants (18h15)

Mercredi 19 Novembre : correction du propé1  
et abaqus ...