

# **Théorie et Pratique des éléments finis**

## **MX-BA5**

3H par semaine (mercredis 15h15-18h), 3 crédits

Moodle: MSE-369

**contrôle pendant le semestre (2 propés)**

[Jean-marie.drezet@epfl.ch](mailto:Jean-marie.drezet@epfl.ch)

Assistants: Noémie Jeannin [noemie.jeannin@epfl.ch](mailto:noemie.jeannin@epfl.ch)

Et Tyler Benkley [tyler.benkley@epfl.ch](mailto:tyler.benkley@epfl.ch)

# Introduction à la méthode des EF

## Prérequis

- Analytical and numerical differentiation & integration
- basic linear algebra
- solution of differential equations
- milieux continus

## Références

- **The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals**, O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J.Z. Zhu, 2005, Elsevier, 752 pages.
- **The Finite Element Method**, G.R. Liu and S. S. Quek, 2013, Elsevier
- **Numerical Methods in Engineering with Python**, Jaan Kiusalaas, 2011, Cambridge University Press
- **Introduction à l'analyse numérique**, J. Rappaz et M. Picasso, 2017, PPUR.
- **Traité des matériaux vol. 10, Modélisation numérique en science et genie des matériaux**, M. Rappaz, M. Bellet et M. Deville, 1998, PPUR.

# Introduction à la méthode des EF

**Equation différentielle ordinaire:** l'inconnue est une fonction d'une seule variable (ODE = ordinary differential equations)

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= 3u(t) - 3t && \text{si } t > 0, \\ u(0) &= \alpha; \end{aligned}$$

**Equation aux dérivées partielles (EDP):** l'inconnue est une fonction de plusieurs variables (PDE = partial differential equations), exemple pour  $T(x,y,z,t)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \nabla^2 T = 0$$

Il y a alors dépendance en temps et en espace de la solution.

La méthode des éléments finis (EF) donne une **approximation numérique de la solution** des EDP en des temps donnés (schéma temporel) et des positions données (schéma spatial) d'un domaine d'étude (pièce).

# Introduction à la méthode des EF

**Référence:** livre Introduction à l'analyse numérique (= IAN), J. Rappaz et M. Picasso, 2017, PPUR. (chapitres 9 à 14).

## **1ère partie sur la théorie des éléments finis**

équa diff. du 1er ordre, unicité, schémas d'Euler et stabilité

différences finies pour un problème 1D stationnaire

formulations fortes et faibles d'un pb elliptique stationnaire 1D

formulation de Galerkin et éléments finis 1D de degré 1

éléments finis 1D de degré 2, traitement des conditions aux limites

Problème elliptique et éléments finis triangulaires de degré 1 (maillage)

Problème parabolique 1D/2D transitoire et éléments finis de degré 1

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis 1D et 2D

**Propé1: mercredi 12 Nov. 2 heures puis correction le mercredi suivant.**

# Introduction à la méthode des EF

## **2<sup>nd</sup>e partie : introduction à Abaqus, programme d'éléments finis**

Intérêts des éléments finis, matrices élémentaires et globales  
Fonctions de forme et élément maître, assemblage  
intégration de Gauss-Legendre, maillage et choix des éléments

### **Résolution sur Abaqus (salle informatique MXF-014):**

Unités, symétries et conditions aux limites

Problème parabolique 2D transitoire : thermique de moulage.

Problème de convection-diffusion : thermique de coulée continue.

Problème de statique: poutre élastique encastree

Problème élastoplastique: retour élastique sur poutre encastree

Dépendance au maillage: convergence et consistance

Contrainte en pointe de fissure (fracture mechanics).

**Propé2: le 17 décembre 2 heures par groupe de 2 (18 groupes).**

# Introduction à la méthode des EF

## **Cours 1 le mercredi 10 Septembre 25**

Equations différentielles ordinaires, existence et unicité, schémas d'Euler et stabilité

Différences finies pour un problème 1D stationnaire

Exos 1 et 2.

# Introduction à la méthode des EF

## Equa diff. du 1er ordre, unicité, schémas d'Euler et stabilité: chapitre 9

Soit une fonction  $f$  de 2 variables:

$x$  = variable d'espace

$t$  = variable temporelle.

$$f : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \mapsto f(x, t) \in \mathbb{R}$$

Pb dit de Cauchy: trouver  $u(t)$  continuellement dérivable telle que :

$$\dot{u}(t) = f(u(t), t) \quad \text{si } t > 0,$$

$$u(0) = u_0,$$

Ex:  $\dot{u}(t) = 3u(t) - 3t \quad \text{si } t > 0,$

$$u(0) = \alpha;$$

# Introduction à la méthode des EF

## Existence et unicité

Il n'y a pas toujours unicité de la solution.

$$\text{Ex: } \begin{cases} \dot{u}(t) = \sqrt[3]{u(t)} & \text{si } t > 0, \\ u(0) = 0; \end{cases}$$

$$\text{si } u \geq 0, \dot{u} u^{-1/3} = 1, \frac{3}{2} \frac{d}{dt}(u^{2/3}) = 1, \frac{d}{dt}(u^{2/3}) = \frac{2}{3}$$

$$u^{2/3} = \frac{2}{3} t \text{ puisque } u(0) = 0 \text{ et } u = \left(\frac{2}{3} t\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{8}{27} t^3}$$

Il y a 3 solutions:  $u(t) = 0$  et  $u(t) = \pm \sqrt{8t^3/27}$ .

La solution n'est pas tjs définie sur  $[0, \infty[$

$$\text{si } u \geq 0, \dot{u} u^{-3} = 1, -\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(u^{-2}) = 1, \frac{d}{dt}(u^{-2}) = -2$$

$$\text{Ex: } \begin{cases} \dot{u}(t) = u^3(t), & t > 0, \\ u(0) = 1; \end{cases}$$

$$u^{-2} = \frac{1}{u^2} = -2t + 1 \text{ car } u(0) = 1 \text{ et } u = \sqrt{\frac{1}{1-2t}} \text{ pour } t < 1/2$$

La solution existe sur  $[0, 1/2[$  et vaut:  $u(t) = 1/\sqrt{1-2t}$

L'étude de l'existence et l'unicité de solution du pb de Cauchy est délicate.

# Introduction à la méthode des EF

## Existence et unicité

**Théorème:** si la dérivée partielle en  $x$  de  $f$  est majorée pour tout  $t > 0$ , il y a une solution unique globale (i.e. définie pour tout  $t > 0$ ).

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \leq K, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq 0.$$

Ex: 
$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u^3(t) + e^{-t^2/2}, & t > 0, \\ u(0) &= 1, \end{aligned}$$

Ici,  $f(x,t)$  vaut: 
$$f(x, t) = -x^3 + e^{-t^2/2}$$

La dérivée partielle en  $x$  est majorée pour tout  $t > 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, t) = -3x^2 \leq 0.$$

Il y a une solution unique et globale.

Mais pas de solution explicite. Intégration numérique.

# Introduction à la méthode des EF

## Schéma d'Euler progressif

Pb de Cauchy:

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= f(u(t), t) && \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned}$$

Schéma d'Euler progressif: on approxime la dérivée au temps  $t_n$

Soit  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots$ , des points de  $\mathbb{R}^+$  et supposons connue une approximation  $u^n$  de  $u$  en  $t = t_n$ . Nous notons dans la suite  $u^n \simeq u(t_n)$ . Un schéma numérique à un pas consiste à calculer  $u^{n+1}$ , approximation de  $u$  en  $t = t_{n+1}$ , à partir de  $u^n$ . Par exemple, le ***schéma d'Euler progressif*** est obtenu en s'inspirant de la première équation de (9.1) et s'écrit :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{t_{n+1} - t_n} = f(u^n, t_n),$$

ou, de façon équivalente :

$$u^{n+1} = u^n + (t_{n+1} - t_n)f(u^n, t_n). \quad (9.5)$$

# Introduction à la méthode des EF

## Schéma d'Euler progressif

Le schéma d'Euler progressif est dit explicite:

$$u^{n+1} = u^n + (t_{n+1} - t_n)f(u^n, t_n).$$

Il est facile à implémenter numériquement MAIS il est **conditionnellement stable**:

Considérons le cas où  $f(x, t) = -\beta x$ , où  $\beta$  est un nombre réel positif donné.  
Le problème (9.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\beta u(t), & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{9.9}$$

La solution tend vers 0 en l'infini:  $u(t) = e^{-\beta t} u_0$

# Introduction à la méthode des EF

## Schéma d'Euler progressif

On discrétise l'axe  $0t$  en posant  $t_n = nh$  avec  $h (= \Delta t, \text{ pas de temps}) > 0$ .

Le schéma d'Euler progressif (9.7) devient

$$u^{n+1} = (1 - \beta h)u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.10)$$

et par suite

$$u^n = (1 - \beta h)^n u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.11)$$

$u_n$  est une suite géométrique de raison  $(1 - \beta h) < 1$ . avec  $\beta > 0$  et  $h > 0$ .

Si  $(1 - \beta h) < -1$ ,  $u_n$  diverge à l'infini en alternant de signe:

le schéma progressif est dit instable ( $u_n$  ne tend pas vers la solution  $u$ )

Pour assurer que  $u_n$  tende vers 0. en l'infini, il faut imposer  $(1 - \beta h) \geq -1$

i.e.  $h = \Delta t \leq 2 / \omega$ : c'est la condition de stabilité: le pas de temps,  $h$ , est limité.

# Introduction à la méthode des EF

## Schéma d'Euler rétrograde

Pb de Cauchy:  $\dot{u}(t) = f(u(t), t)$  si  $t > 0$ ,  
 $u(0) = u_0$ ,

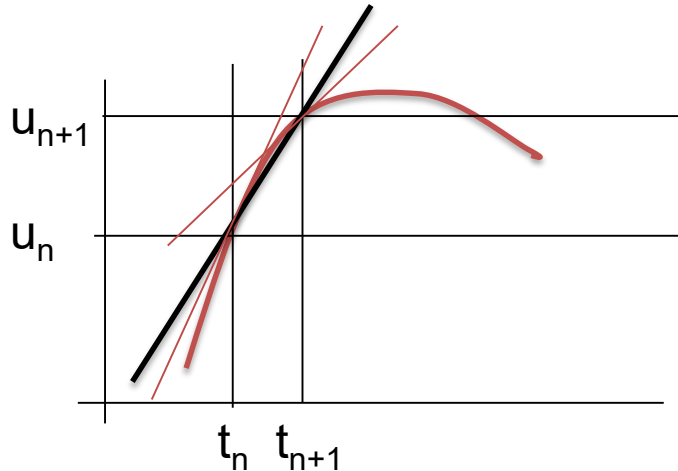
**Schéma d'Euler rétrograde:** on approxime la dérivée au temps  $t_{n+1}$

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{h_n} = f(u^{n+1}, t_{n+1}), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$
$$u^0 = u_0.$$

**Les 2 schémas d'Euler :**

**progressif  
(explicite)**

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{t_{n+1} - t_n} = f(u^n, t_n),$$



**et rétrograde  
(implicite)**

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{t_{n+1} - t_n} = f(u^{n+1}, t_{n+1}),$$

# Introduction à la méthode des EF

## Schéma d'Euler rétrograde

Le schéma d'Euler rétrograde est dit implicite.

En effet, nous avons avec le pas de temps :  $h_n = t_{n+1} - t_n$ :

$$u^{n+1} - h_n f(u^{n+1}, t_{n+1}) = u^n.$$

Si nous voulons calculer  $u^{n+1}$ , nous définissons la fonction

$$g(x) = x - h_n f(x, t_{n+1}) - u^n$$

et nous cherchons un zéro de  $g(x)$  en prenant par exemple une méthode de Newton (sect. 8.3). Ainsi nous pouvons poser  $x_0 = u^n$  et  $x_{m+1} = x_m - g(x_m)/g'(x_m)$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Puisque  $g'(x) = 1 - h_n \partial f(x, t_{n+1})/\partial x$ , nous obtenons donc dans ce cas le schéma :

$$x_0 = u^n,$$
$$x_{m+1} = x_m - \frac{x_m - h_n f(x_m, t_{n+1}) - u^n}{1 - h_n \frac{\partial f}{\partial x}(x_m, t_{n+1})}, \quad m = 0, 1, \dots$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} x_m = u^{n+1}$$

# Introduction à la méthode des EF

## Schéma d'Euler rétrograde

Il est plus fastidieux à implémenter numériquement MAIS il est **inconditionnellement stable**:

Considérons le cas où  $f(x, t) = -\beta x$ , où  $\beta$  est un nombre réel positif donné.

Le problème (9.1) devient :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -\beta u(t), & \text{si } t > 0, \\ u(0) &= u_0, \end{aligned} \tag{9.9}$$

La solution tend vers 0 en l'infini:  $u(t) = e^{-\beta t} u_0$

Le schéma d'Euler rétrograde (9.8) devient dans le cadre de notre exemple :

$$(1 + \beta h)u^{n+1} = u^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

et par suite :

$$u^n = \left( \frac{1}{1 + \beta h} \right)^n u_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

La raison de la suite est comprise entre 0 et 1:  
 $\beta \geq 0$  donc  $0 < 1/(1+\beta h) < 1$ .

Dans ce cas, nous voyons que pour tout  $h > 0$ , nous avons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u^n = 0;$$

le schéma d'Euler rétrograde est donc toujours stable;  $h$  n'a pas à être limité!

# Introduction à la méthode des EF

## Précision et ordre des schémas d'Euler dans le cas d'une solution globale unique

*Soit  $T > 0$  le temps jusqu'où nous voulons intégrer (9.1), soit  $N$  un entier positif, soit  $h = T/N$  le pas de temps et soit  $t_n = nh$  avec  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ . Alors il existe une constante  $C$  (indépendante de  $N$  mais qui peut dépendre de  $T$ ) telle que pour tout  $N$  nous avons :*

$$|u(T) - u^N| \leq \frac{C}{N} = \frac{C}{T}h, \quad (9.22)$$

*où les approximations  $u^0, u^1, \dots, u^N$  sont données par le schéma d'Euler progressif (9.7) ou le schéma d'Euler rétrograde (9.8). En particulier nous avons  $\lim_{N \rightarrow \infty} |u(T) - u^N| = 0$ .*

Autrement dit,  $|u(T) - u^N| = O(h)$ : les schémas d'Euler sont d'ordre 1 en  $h$ .

L'erreur commise au temps  $T$  sera divisée par 2 si le pas de temps  $h$  est divisé par 2.

# Introduction à la méthode des EF

## Autres méthodes ...

**Formule des trapèzes** (méthode implicite ou explicite ?):

$$u^{n+1} - u^n = \frac{1}{2}h_n \left( f(u^n, t_n) + f(u^{n+1}, t_{n+1}) \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

(condition de stabilité identique à Euler progressif, cf. exo 9.2 de IAN)

**Runge-Kutta classique** (méthode implicite ou explicite ?):

$$p_1 = f(u^n, t_n),$$

$$p_2 = f\left(u^n + \frac{h_n}{2}p_1, t_n + \frac{h_n}{2}\right),$$

$$p_3 = f\left(u^n + \frac{h_n}{2}p_2, t_n + \frac{h_n}{2}\right),$$

$$p_4 = f(u^n + h_n p_3, t_{n+1}),$$

$$u^{n+1} = u^n + \frac{h_n}{6}(p_1 + 2p_2 + 2p_3 + p_4).$$

C'est une méthode d'ordre 4:  $|u(T) - u^N| \leq Ch^4 = C \frac{T^4}{N^4}$ ,

(condition de stabilité moins restrictive que Euler progressif, cf. exo 9.2 de IAN)

# Introduction à la méthode des EF

## Systèmes différentiels vectoriels du premier ordre

Soit  $M$  un entier positif et soit  $\vec{f} : (\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \vec{f}(\vec{x}, t) \in \mathbb{R}^M$  une fonction vectorielle donnée, supposée continue. Si  $\vec{u}_0$  est un vecteur à  $M$  composantes données, on pose le problème de trouver une fonction à valeurs vectorielles

$$\vec{u} : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow \vec{u}(t) \in \mathbb{R}^M$$

telle que

$$\begin{aligned} \dot{\vec{u}}(t) &= \vec{f}(\vec{u}(t), t), & t > 0, \\ \vec{u}(0) &= \vec{u}_0. \end{aligned} \tag{9.32}$$

Composante par composante soit  $M$  équations différentielles ordinaires.

# Introduction à la méthode des EF

## Equation différentielle du second ordre

Considérons dans un premier temps le cas d'une fonction à 3 variables

$$f : (x, y, t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow f(x, y, t) \in \mathbb{R}$$

que nous supposons continue, et soit deux nombres donnés  $u_0$  et  $v_0$ . On pose le problème de trouver une fonction

$$u : t \in \mathbb{R}^+ \rightarrow u(t) \in \mathbb{R},$$

deux fois continûment dérivable, telle que

$$\begin{aligned} \ddot{u}(t) &= f(u(t), \dot{u}(t), t), & t > 0, \\ u(0) &= u_0, & \dot{u}(0) = v_0, \end{aligned} \tag{9.34}$$

où nous avons noté  $\ddot{u}(t) = d^2u(t)/dt^2$ . Le problème (9.34) est appelé ***problème différentiel du deuxième ordre***; deux conditions initiales sont fixées qui, en dynamique par exemple, correspondent le plus souvent à l'état initial et à la vitesse initiale lorsque  $t$  est le temps.

# Introduction à la méthode des EF

## Equation différentielle du second ordre

Pour résoudre numériquement le problème (9.34), nous pouvons par exemple introduire une nouvelle inconnue  $v(t) = \dot{u}(t)$  et ainsi remplacer (9.34) par un système du premier ordre pour les inconnues  $u(t)$  et  $v(t)$  :

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= v(t), \\ \dot{v}(t) &= f(u(t), v(t), t), \quad t > 0, \\ u(0) &= u_0 \quad \text{et} \quad v(0) = v_0. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Le problème (9.35) est un système différentiel du premier ordre de 2 équations à 2 inconnues.

Ex: force de trainée lors d'une chute dans l'air

en  $t = 0$ ,  $z = 0$  et  $v = 0$  ( $\vec{g} = g\vec{e}_z$ )

pour  $t \geq 0$ ,  $v = \dot{z}$  et  $m\dot{v} = m\ddot{z} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 + mg$

$C_x$ : coefficient de trainée et  $\rho$  masse volumique du fluide.

# Introduction à la méthode des EF

## Résumé

Pour résoudre le pb de Cauchy,  $\dot{u}(t) = f(u(t), t)$  si  $t > 0$ ,  
 $u(0) = u_0$ ,

on a recours:

- au schéma progressif qui est explicite mais conditionnellement stable
- au schéma rétrograde qui est implicite et inconditionnellement stable
- ou à des schémas d'ordre supérieur (formule des trapèzes ou Runge Kutta)

Ces schémas :

- ne donnent une approximation qu'en certains temps  $t_n$
- sont d'autant plus précis que le pas de temps est petit
- et seront utilisés pour la résolution en temps des problèmes transitoires résolus par les éléments finis en espace.

Abaqus utilise l'intégration implicite en temps car inconditionnellement stable.

# Introduction à la méthode des EF

**Exo1: on considère l'équation différentielle suivante:**

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= -u^3(t) + e^{-t^2/2}, & t > 0, \\ u(0) &= 1, \end{aligned}$$

- 1) Calculer la dérivée première de  $u(t)$  en 0 et la limite de  $u(t)$  à l'infini.
- 2) Ecrire le schéma de Euler explicite et calculer dans Excel  $u(t=10)$  avec 4 chiffres derrière la virgule pour  $\Delta t = 1.$  et  $\Delta t = 0.1$
- 3) Evaluer dans excel le pas de temps maximum qui donne une solution convergente
- 4) Ecrire le schéma de Euler implicite sans le résoudre
- 5) Ecrire le schéma mixte (méthode des trapèzes) sans le résoudre

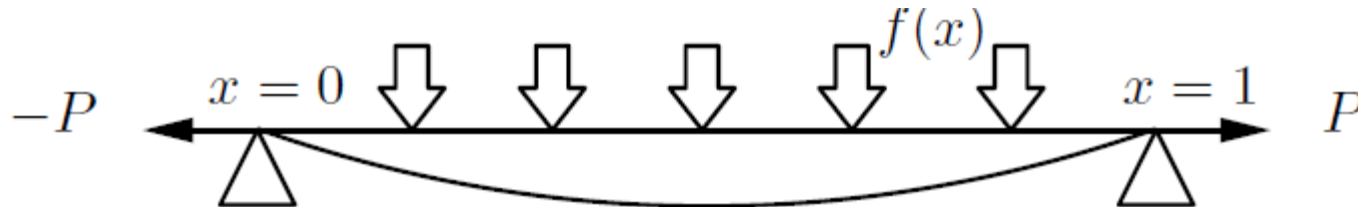
# Introduction à la méthode des EF

## Différences finies et éléments finis pour un problème 1D stationnaire (chap. 10 de Introduction à l'Analyse Numérique)

Considérons le problème suivant : étant donné deux fonctions  $c$  et  $f$  continues sur l'intervalle  $[0, 1]$ , trouver une fonction  $u$  deux fois continûment dérivable sur  $[0, 1]$  telle que

$$\begin{aligned} -u''(x) + c(x)u(x) &= f(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ u(0) = u(1) &= 0. \end{aligned} \tag{10.1}$$

Ex: fléchissement d'une corde étirée selon son axe par une force  $P$  et fixée en  $x = 0$  et  $1$ . avec appuis simple.  $F(x)$  est la densité linéaire de charge,  $c(x) = P/EI(x)$  avec  $E$  module de Young et  $I(x)$  moment principal d'inertie de la section de la poutre en  $x$



# Introduction à la méthode des EF

Remarques:

La longueur de la corde est normalisée à 1. On cherche donc la solution sur  $[0,1]$ .

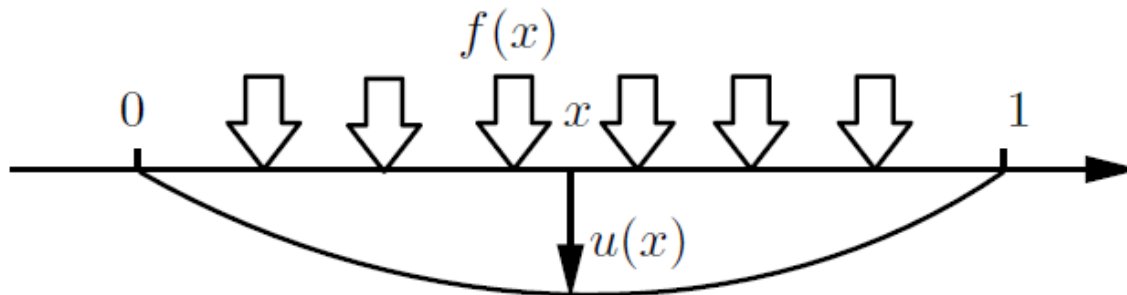
Si la corde est définie entre  $a$  et  $b$ , on fait le changement de variable  $x'=(x-a)/(b-a)$  et ainsi  $x'$  varie de 0 à 1.

Le pb est du second ordre et requiert deux conditions, appelées conditions aux limites.

Théorème: si  $c(x) \geq 0$  sur  $[0,1]$ , il y a **existence et unicité** de la solution.

Si  $c(x) = 0$ , le pb s'appelle pb de Poisson:  $-u''(x) = f(x)$ .

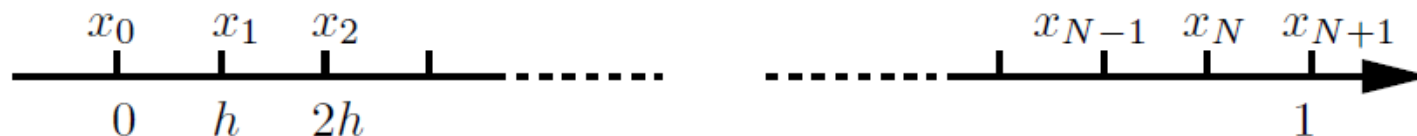
$u(x)$  est le déplacement vertical d'une corde tendue entre 0 et 1, soumise à une tension unité et à une densité de charge verticale  $f(x)$ .



# Introduction à la méthode des EF

**Méthode des différences finies** pour le cas où  $u(x)$  ne s'écrit pas sous forme analytique.

Soit  $N$  un entier positif; on pose  $h = 1/(N + 1)$  et on note  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ , les points de discrétisation (fig. 10.3).



$h$  est le pas d'espace:  $h < 1.0$

Si  $u$  est quatre fois continûment dérivable, alors

$$u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$$

où  $O(h^2)$  désigne un reste qui, lorsque  $h$  tend vers zéro, reste borné par une constante multipliée par  $h^2$ .

Notons  $u_j$  l'approximation de  $u(x_j)$ . Nous obtenons:

$$\frac{-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}}{h^2} + c(x_j)u_j = f(x_j) \quad 1 \leq j \leq N,$$

$$u_0 = u_{N+1} = 0.$$

# Introduction à la méthode des EF

Le schéma est dit **pb approché ou pb discret** par opposition au pb continu dont  $u(x)$  est solution. C'est un schéma d'approximation en différences finies.

Le pb discret consiste à chercher un nbre fini,  $N$ , de valeurs  $u_j$ , approximations de  $u(x_j)$ .

Si  $\vec{u}$  est le  $N$ -vecteur colonne de composantes  $u_1, u_2, \dots, u_N$ , si  $\vec{f}$  est le  $N$ -vecteur de composantes  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_N)$  et si  $A$  est la  $N \times N$  matrice tridiagonale définie par

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 + c_1 h^2 & -1 & & & \\ -1 & 2 + c_2 h^2 & -1 & & 0 \\ & -1 & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \ddots & -1 \\ & & & -1 & 2 + c_N h^2 \end{bmatrix}, \quad (10.5)$$

où  $c_i = c(x_i)$ , alors le problème approché (10.3) (10.4) est clairement équivalent à chercher  $\vec{u}$  tel que

$$A\vec{u} = \vec{f}. \quad (10.6)$$

# Introduction à la méthode des EF

Rappel: si  $c(x) \geq 0$  sur  $[0,1]$ , il y a existence et unicité de la solution.

Si  $c(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ , on peut montrer que  $A$  est une matrice symétrique définie positive. Elle est donc régulière et soit  $\vec{u}$  la solution de (10.6) que l'on peut obtenir après avoir fait une décomposition de Cholesky de la matrice  $A$

Rappel: matrice symétrique définie positive

**Définition 5.1** Une  $N \times N$  matrice  $A$  est dite symétrique définie positive si :

- i)  $A = A^T$  ( $A$  est symétrique),
- ii)  $\vec{y}^T A \vec{y} \geq 0$  pour tout  $N$ -vecteur  $\vec{y}$ ,
- iii)  $\vec{y}^T A \vec{y} = 0$  si et seulement si  $\vec{y} = 0$ .

NB: Toutes les valeurs propres de  $A$  sont réelles et positives.

lorsqu'on veut résoudre un système linéaire

$$A\vec{x} = \vec{b},$$

où la matrice  $A$  est symétrique définie positive, on fait une décomposition de Cholesky  $A = LL^T$  et on résout successivement

$$L\vec{y} = \vec{b}, \quad \text{puis} \quad L^T \vec{x} = \vec{y}. \quad \text{NB: } L \text{ est une matrice inférieure (lower)}$$

# Introduction à la méthode des EF

L'erreur entre approximation et solution est d'ordre 2 en pas d'espace  $h = 1/(N+1)$ : donc plus  $h$  est petit, meilleure est l'approximation. Mais cela se fait au détriment du temps de calcul .... (optimum entre temps de calcul et qualité de l'approximation).

**Théorème 10.1** *On suppose que  $c(x) \geq 0, \forall x \in [0, 1]$  et que la solution  $u$  de (10.1) est quatre fois continûment dérivable. Alors il existe une constante  $C$  indépendante de  $N$  (et donc de  $h$ ) telle que*

$$\max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| \leq Ch^2. \quad (10.7)$$

On constate donc que si  $(u_j)_{1 \leq j \leq N}$  est solution de (10.3) et si  $u$  est solution de (10.1), on a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq N} |u(x_j) - u_j| = 0. \quad (10.8)$$

De plus, l'erreur est, en principe, quatre fois plus petite chaque fois qu'on double le nombre de points de discrétisation.

## Exo2a:

# Introduction à la méthode des EF

1- Etablir la relation  $u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2)$

2- Établir le schéma aux différences finies dans lequel  $u(x)$  est le déplacement vertical d'une corde non tendue ( $P=0$  donc  $c(x) = P/EI(x) = 0$ ), fixée en  $x=0$  et  $1$  et soumise à une densité de charge verticale  $f(x) = -x$ .

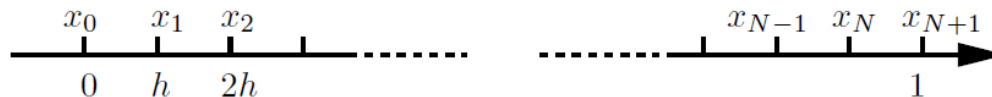
3- En prenant  $N = 3$ , calculer une approximation de la solution en  $x = 0.25, 0.5$  et  $0.75$  à l'aide d'une décomposition de Cholesky.

Indication: calculer le produit matriciel:

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{3/2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2/3} & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3/2} & -\sqrt{2/3} \\ 0 & 0 & 2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Seconde indication: comparer votre résultat avec LA SOLUTION ANALYTIQUE

Soit  $N$  un entier positif; on pose  $h = 1/(N+1)$  et on note  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N+1$ , les points de discrétisation (fig. 10.3).



# Introduction à la méthode des EF

## Exo2b: condition sur la dérivée de $u(x)$ en $x = 0$ (condition essentielle)

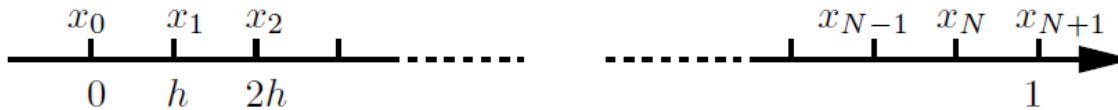
Établir le schéma aux différences finies dans lequel  $u(x)$  est le déplacement vertical d'une corde non tendue ( $P=0$  donc  $c(x) = P/EI(x) = 0$ ), telle **que  $du/dx = a$  en  $x = 0$**  et  $u(1)=0$  et soumise à une densité de charge verticale  $f(x) = -x$ .

On notera  $u_0$  l'approximation de  $u$  en  $x = 0$ . et on utilisera le  $(N+1)$  vecteur  $\vec{u} =$

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \dots \\ u_{N-1} \\ u_N \end{pmatrix}$$

Déterminer la solution analytique.

Soit  $N$  un entier positif; on pose  $h = 1/(N + 1)$  et on note  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N + 1$ , les points de discrétisation (fig. 10.3).



# Introduction à la méthode des EF

Cours 2 : formulations fortes, faibles et de  
Galerkin