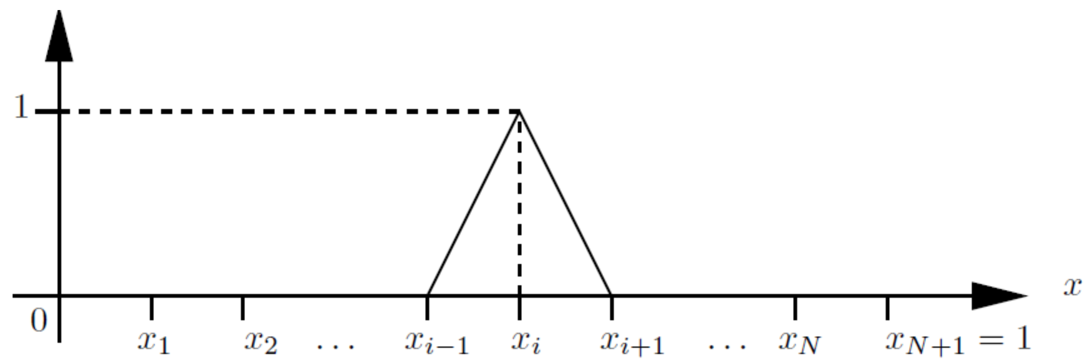
Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Exo 6a: montrer que $A_{i,i-1} = -\varepsilon/h - c_0/2$ et $f_j = h\, f_0$ avec $f(x) = f_0 =$ cste et $c(x)=c_0$ pour le pb de convection-diffusion 1D avec des fonctions linéaires (fonctions chapeaux).



$$A_{ji} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i' \varphi_j' dx + \int_0^1 c_0 \varphi_j \varphi_i' dx$$

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x)dx, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Corrigé 6a: montrer que $A_{i,i-1} = -\varepsilon/h - c_0/2$ et $f_j = h\, f_0$ avec $f(x) = f_0 = \text{cste}$ et $c(x)=c_0$ pour le pb de convection-diffusion 1D avec des fonctions linéaires.

$$A_{i,i-1} = \int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi'_{i-1} dx$$

$$A_{i,i-1} = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varepsilon \left(\frac{-1}{h}\right)\frac{1}{h} dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c_0 \varphi_i \left(\frac{-1}{h}\right) dx$$

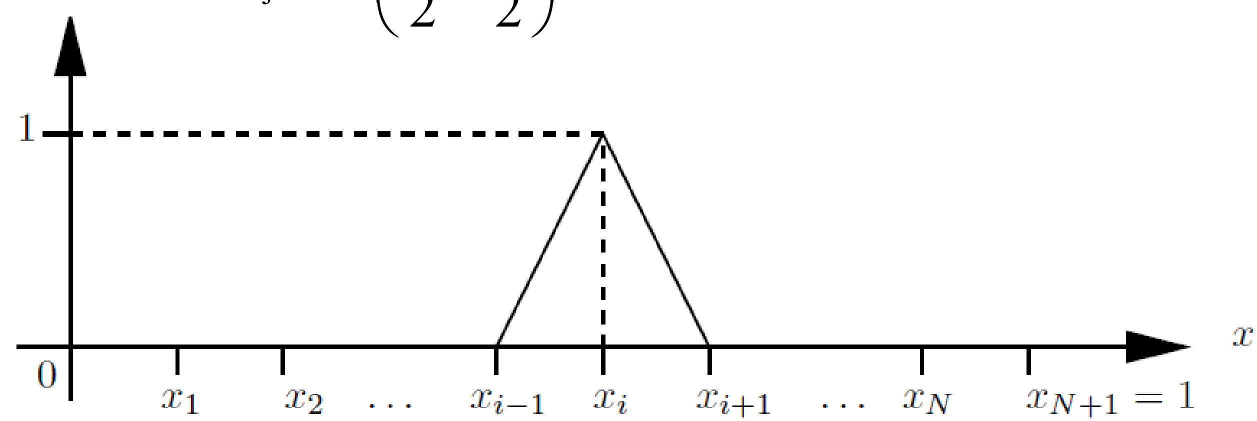
$$A_{i,i-1} = \varepsilon\left(\frac{-1}{h^2}\right) h - \frac{c_0}{h}\int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i dx$$

$$A_{i,i-1} = \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{h}\frac{h}{2} = \frac{-\varepsilon}{h} - \frac{c_0}{2}$$

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x) dx, \qquad j = 1, \ldots, N.$$

$$f_j = \int_0^1 f(x)\varphi_j(x) dx = f_0 \int_{xj-1}^{xj} \varphi_j(x) dx + f_0 \int_{xj}^{xj+1} \varphi_j(x) dx$$

$$f_j = f_0\left(\frac{h}{2} + \frac{h}{2}\right) = h f_0$$



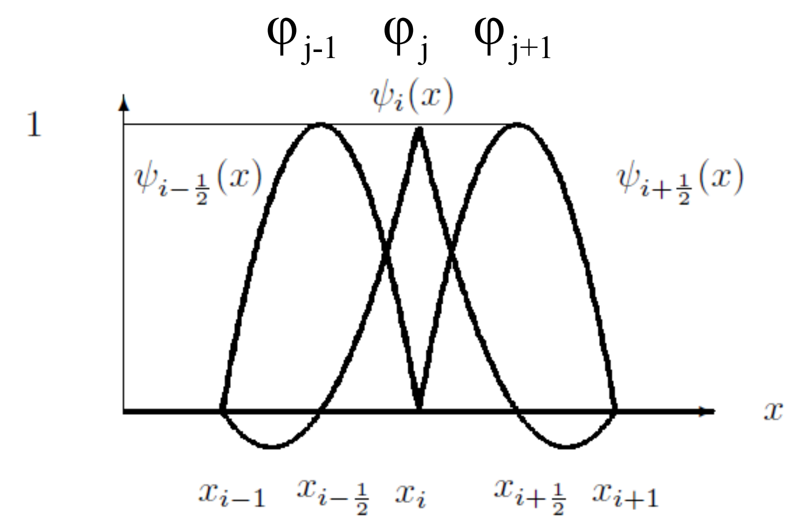
Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Eléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

Exo 6b : calculer les termes diagonaux

$$A_{i,i} = \int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i' \varphi_i dx \quad \textbf{pour i pair}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x - x_{i-1})(x - x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \dfrac{(x - x_{i+1})(x - x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i - x_{i+1})(x_i - x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_{i-1} \text{ ou } x \ge x_{i+1}; \end{cases}$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Eléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

Corrigé exo 6b : calculer les termes diagonaux

$$A_{i,i}=\int_0^1 \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i' \varphi_i dx \quad \textbf{pour i pair}$$

$$\psi_i(x)=\begin{cases} \dfrac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1}\le x\le x_i, \\ \dfrac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i\le x\le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x\le x_{i-1} \text{ ou } x\ge x_{i+1}; \end{cases}$$

i pair: $\varphi_i(x)=\psi_i(x)$ dont le carré est symétrique p.r. à $x = x_i$

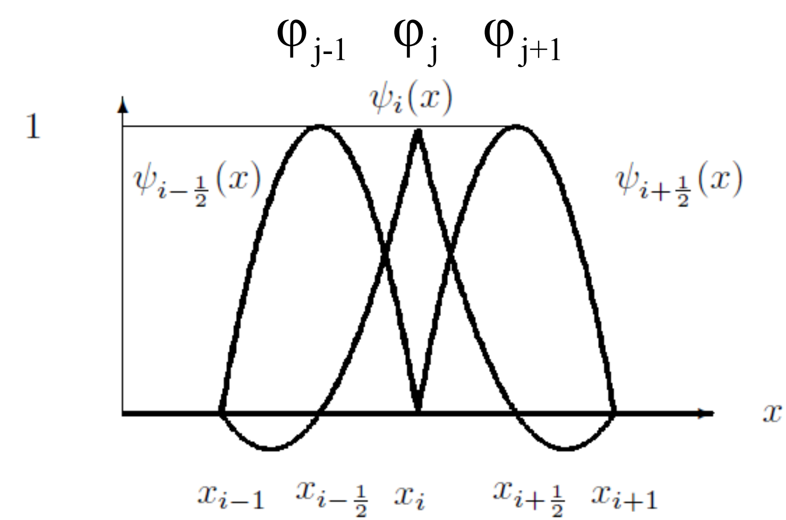
$$A_{ii\ (i\ paire)} = 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon \varphi_i'^2 dx + \int_{x_{i-1}}^{x_i} c_0 \varphi_i' \varphi_i dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} c_0 \varphi_i' \varphi_i dx = 2\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varepsilon \varphi_i'^2 dx \quad \text{car } \varphi_i'\varphi_i \text{ est impaire p.r. à } x = x_i$$

$$\varphi_i(x)=\frac{2(x-x_{i+1})(x-x_{i+1/2})}{hh} \quad \text{et} \quad \varphi'_i(x) = \frac{2(x-x_{i+1}+x-x_{i+1/2})}{hh} \quad \text{sur } [x_i,x_{i+1}]$$

$$A_{ii\ (i\ paire)} = \frac{2\varepsilon}{h^4}\int_0^h (2u-2h+2u-h)^2\, du \quad \text{avec } u = x-x_i = x-x_{i+1}+h = x-x_{i+1/2}+h/2$$

$$A_{ii\ (i\ paire)} = \frac{2\varepsilon}{h^4}\int_0^h (4u-3h)^2\, du = \frac{2\varepsilon}{h^4}\left[\frac{(4u-3h)^3}{12}\right]_0^h$$

$$A_{ii\ (i\ paire)} = \frac{2\varepsilon}{h^4}\left[\frac{h^3}{12}+\frac{27h^3}{12}\right] = \frac{28}{12}\frac{2\varepsilon}{h} = \frac{14}{3}\frac{\varepsilon}{h} \quad \left(\text{NB } A_{ii\ (i\ impaire)} = \frac{16\varepsilon}{3h}\right)$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Eléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

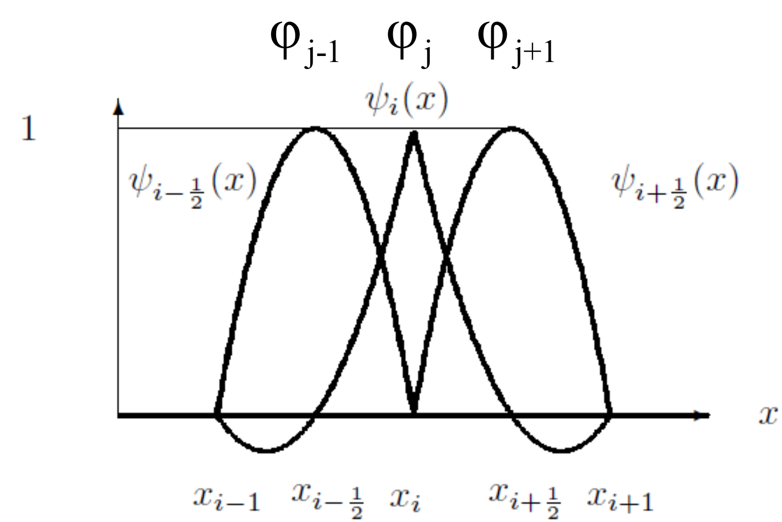
$$A_{ji} = \int_0^1 \Big(\varepsilon\varphi_i'(x)\varphi_j'(x) + c(x)\varphi_i'(x)\varphi_j(x)\Big)dx$$

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_i \text{ ou } x \ge x_{i+1}. \end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \dfrac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_{i-1} \text{ ou } x \ge x_{i+1}; \end{cases}$$

Pour i impair, $\mathbf{A_{i,i-2}} = 0$ et $\mathbf{A_{i,i+2}} = 0$

mais pas pour i pair !



exo 6c :

Calculez $\mathbf{A_{i,i-1}} = \int_0^1 \varepsilon\varphi_i'\varphi_{i-1}'dx + \int_0^1 c_0\varphi_i\varphi_{i-1}'dx$ **pour i pair**

Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Eléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

exo 6c : corrigé

Termes $\mathbf{A_{i,i-1}} = \int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi'_{i-1} dx$ **pour i pair**

NB: $\int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx = \int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i+1} dx = -\dfrac{8\varepsilon}{3h}$ (?)

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_i \text{ ou } x \ge x_{i+1}. \end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \dfrac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_{i-1} \text{ ou } x \ge x_{i+1}; \end{cases}$$

i pair: le support commun entre φ_i et φ_{i-1} est $[x_{i-1},x_i]$.

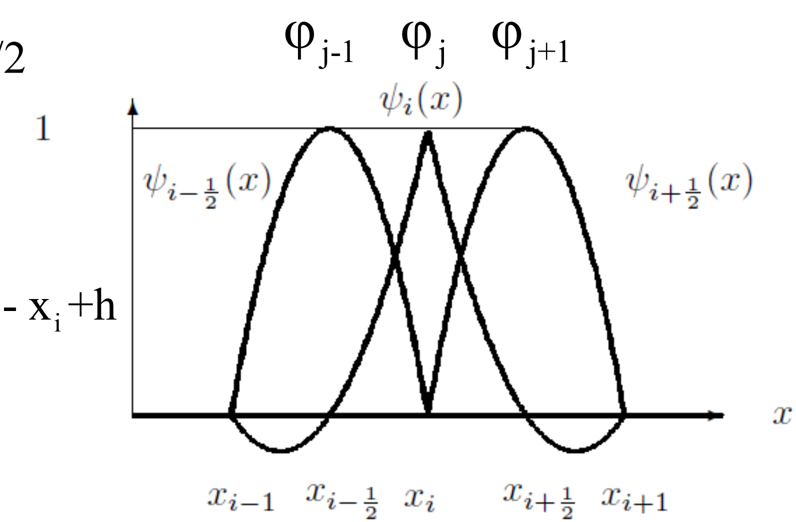
sur $[x_{i-1},x_i]$:

$\varphi_i(x) = \dfrac{2(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})}{hh} = \dfrac{2u(u+h/2)}{hh}$ avec $u = x - x_{i-1} = x - x_{i-1/2} - h/2$

$\varphi'_i(x) = \dfrac{2(u+h/2)+2u}{hh} = \dfrac{4u+h}{hh}$

$\varphi_{i-1}(x) = \psi_{i-1/2}(x) = \dfrac{-4(x-x_{i-1})(x-x_i)}{hh} = \dfrac{-4u(u-h)}{hh}$ avec $u = x - x_{i-1} = x - x_i + h$

et $\varphi'_{i-1}(x) = \dfrac{-4(u-h)-4u}{hh} = \dfrac{-8u+4h}{hh}$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Eléments finis 1D quadratiques sur un maillage régulier

exo 6c : corrigé

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_i \text{ ou } x \ge x_{i+1}. \end{cases}$$

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_{i-1})(x-x_{i-\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i-\frac{1}{2}})} & \text{si } x_{i-1} \le x \le x_i, \\ \dfrac{(x-x_{i+1})(x-x_{i+\frac{1}{2}})}{(x_i-x_{i+1})(x_i-x_{i+\frac{1}{2}})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_{i-1} \text{ ou } x \ge x_{i+1}; \end{cases}$$

Termes $\mathbf{A_{i,i-1}} = \int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx + \int_0^1 c_0 \varphi_i \varphi'_{i-1} dx$ **pour i pair**

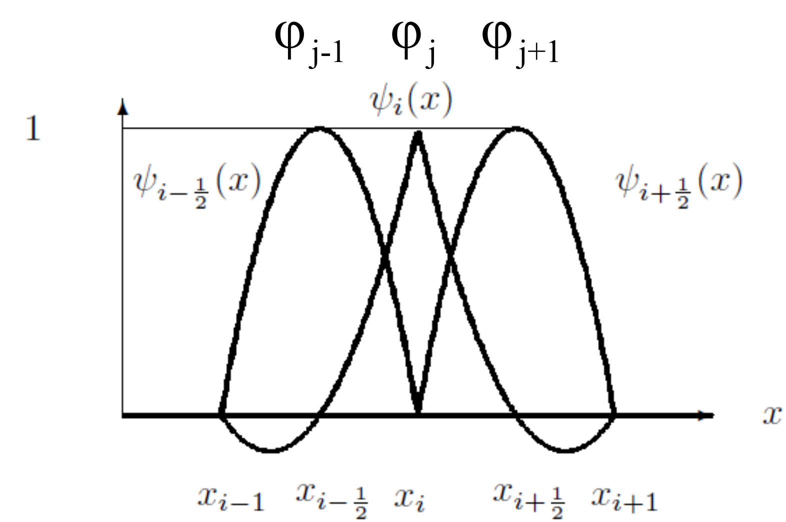
NB: $\int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i-1} dx = \int_0^1 \varepsilon \varphi'_i \varphi'_{i+1} dx = -\dfrac{8\varepsilon}{3h}$ ok !

$$A_{i,i-1} = \frac{\varepsilon}{h^4}\int_0^h (4u+h)(-8u+4h)du + \frac{c_0}{h^4}\int_0^h 2u(u+h/2)(-8u+4h)du$$

$$A_{i,i-1} = \frac{4\varepsilon}{h^4}\int_0^h (-8u^2+2uh+h^2)du + \frac{c_0}{h^4}\int_0^h (-16u^3+4h^2u)du$$

$$A_{i,i-1} = \frac{4\varepsilon}{h^4}\left[-8u^3/3+u^2h+uh^2\right]_0^h + \frac{c_0}{h^4}\left[-4u^4+2u^2h^2\right]_0^h$$

$$A_{i,i-1} = -\frac{4\varepsilon}{h}\frac{2}{3} + c_0(-4+2) = -\frac{8\varepsilon}{3h} - 2c_0$$

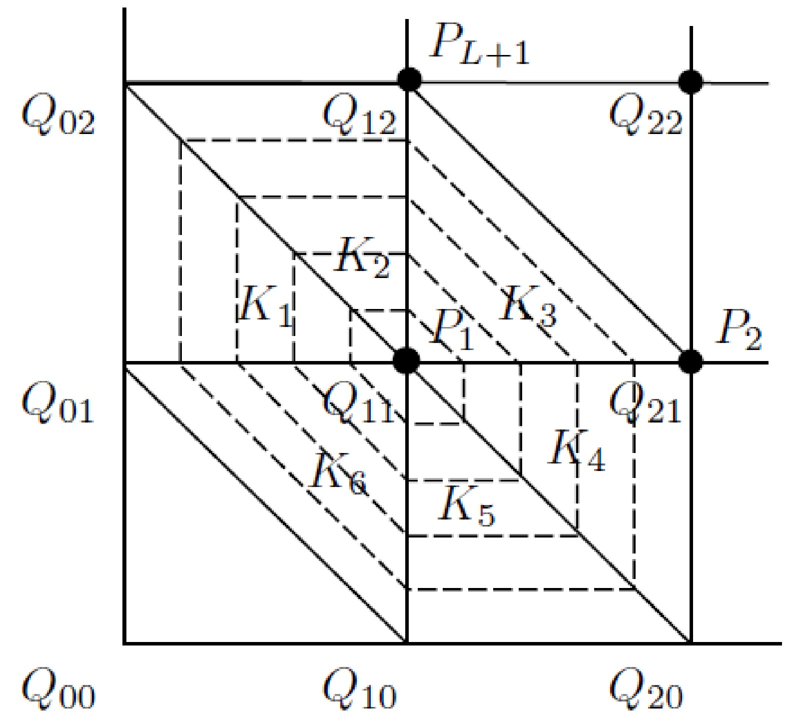


Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Exo 6d : dans le pb de convection-diffusion 2D, montrer que les termes diagonaux A_{ii} valent 4ε si la vitesse c(x) est donnée par:

$$\vec{c}(x,t)=c_o(t)\vec{u}_y$$

$$A_{ji}=\int_\Omega \varepsilon\nabla\varphi_i\nabla\varphi_j dV+\int_\Omega\left(\vec{c}(x,t).\vec{\nabla}\varphi_i\right)\varphi_j dV$$



Problèmes de convection-diffusion et éléments finis

Corrigé 6d: calculer les termes diagonaux Aii dans le cas $\vec{c}(x,t) = c_o(t)\vec{u}_y$
pour le pb de convection-diffusion 2D

$$A_{ii} = \int_\Omega \varepsilon \nabla\varphi_i \nabla\varphi_i dV + \int_\Omega \left(c_0(t)\vec{u}_y.\vec{\nabla}\varphi_i\right)\varphi_i dV = A_{11} \text{ par symétrie}$$

$$A_{11} = \varepsilon \int_{K1,2,4,5} \left(\frac{1}{h^2}\right) dV + \varepsilon \int_{K3,K6} \left(\frac{2}{h^2}\right) dV - \int_{K2} \frac{c_0(t)}{h}\varphi_1 dV + \int_{K5} \frac{c_0(t)}{h}\varphi_1 dV - \int_{K3} \frac{c_0(t)}{h}\varphi_1 dV + \int_{K6} \frac{c_0(t)}{h}\varphi_1 dV$$

$$A_{11} = \varepsilon\left(4\frac{1}{h^2}\frac{h^2}{2} + 2\frac{2}{h^2}\frac{h^2}{2}\right) + 0$$

$$A_{11} = 4\varepsilon$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 = \frac{1}{\tilde{h}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{sur } K_1 \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 = \frac{1}{\tilde{h}}\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} \quad \text{sur } K_4,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 = \frac{1}{\tilde{h}}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix} \quad \text{sur } K_2 \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 = \frac{1}{\tilde{h}}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{sur } K_5,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 = \frac{1}{\tilde{h}}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix} \quad \text{sur } K_3 \qquad \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1 = \frac{1}{\tilde{h}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{sur } K_6.$$