Corrigé du midterm1 du 12 Novembre 2025

Problème parabolique 1D transitoire et éléments finis de degré 2 (0.5/0.5/0.5/0.5/1/1/1/1 points)

Soit g(x) une fonction scalaire continue sur l'intervalle [0,1], soit k un réel positif et soit f(x,t) une fonction scalaire, on cherche une solution approchée de u(x,t) pour x dans [0,1] et t >0, solution de :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ \forall\ x \in]0,1[\ \text{ et } \forall\ t > 0 \text{ avec } u(0,t) = u(1,t) = 0\ \left(\text{conditions aux limites}\right)$$
$$\text{et } u(x,0) = g(x)\quad \left(\text{condition initiale}\right) \qquad \text{(pb. 1)}$$

Il s'agit d'un problème transitoire de diffusion dans lequel le second terme représente la diffusion et le terme de droite un terme de source ou de puits comme par exemple dans l'équation de la chaleur.

1. **Donner une formulation faible du problème ci-dessus** en choisissant une fonction test v(x) à dérivée continue par morceaux et telle que v(0)= v(1)=0.

On multiplie l'équation que vérifie u(x,t) par une fonction v(x), on intègre de 0 à 1 et on utilise une intégration par partie :

$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v(x)dx - \int_0^1 k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx,$$
$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v(x)dx - k\left[\frac{\partial u}{\partial x}v(x)\right]_0^1 + k\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} v'(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx \text{ avec } v(0) = v(1) = 0, \text{il vient } \left[\frac{\partial u}{\partial x}v(x)\right]_0^1 = 0$$
$$\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial t} v(x)dx + k\int_0^1 \frac{\partial u}{\partial x} v'(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v(x)dx \text{ ceci pour toute fonction } v(x) \text{ de l'espace vectoriel V.}$$

2. **Donner alors l'approximation de Galerkin dans V_h du problème ci-dessus.**
Le pb revient à trouver u(x,t) dans V_h, notée $u_h(x,t)$ telle que l'équation précédente soit valable pour toute fonction v(x) de V_h que nous notons v_h :
$$\int_0^1 \frac{\partial u_h(x,t)}{\partial t} v_h(x)dx + k\int_0^1 \frac{\partial u_h(x,t)}{\partial x} v_h'(x)dx = \int_0^1 f(x,t)v_h(x)dx \text{ ceci pour toute fonction } v_h(x) \text{ de Vh.}$$

3. **On note $u_i(t)$ l'approximation de u en x_i= ih/2, $u_i(t) \sim u(x_i,t)$ au temps t (i = 1 à N),** et on remarque que les fonctions φ_j (j = 1 à N) sont telles que $\varphi_j(x_i) = \delta_{ij}$ =1 si i=j et 0 sinon (symbole de Kronecker). On cherche u_h dans V_h donc $u_h(x,t)$ s'écrit à l'aide des u_i :
$$u_h(x,t) = \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\varphi_i(x)$$

Il faut et il suffit que pour toutes les fonctions φ_j (j = 1 à N) nous ayons :

$$\sum_{i=1}^{N} \dot{u}_i(t)\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx + \sum_{i=1}^{N} u_i(t)\int_0^1 k\varphi_i'(x)\varphi_j'(x)dx$$
$$= \int_0^1 f(x,t)\varphi_j(x)dx \qquad j = 1,\ldots,N.$$

que l'on réécrit sous forme matricielle : $M\,\overrightarrow{\dot{u}(t)} + A\overrightarrow{u(t)} = \overrightarrow{f(t)},\ \forall\ t > 0$

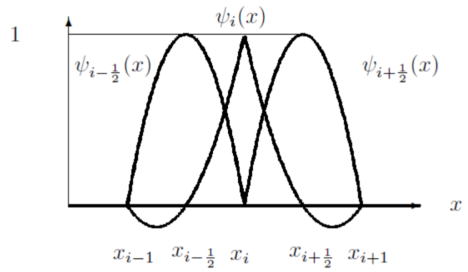
avec : $A_{ji}=\int_0^1 k\varphi'_i(x)\varphi'_j(x)dx = A_{ij}$, $M_{ij}=\int_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = M_{ji}$ et $f_j(t)=\int_0^1 f(x,t)\varphi_j(x)dx$

On remarque que A et M sont bien symétriques.

4. Quelle sont les demi-largeurs de bande des matrices A et M ?

Une fonction φ_j a une adhérence commune avec elle-même, φ_{j+1}, φ_{j+2} et φ_{j-1}, φ_{j-2}, idem pour sa dérivée donc A et M sont pentadiagonales et comme elles sont symétriques, leur demi-largeur de bande est de 3.

5. Calculez A_{ii} pour i pair. Pour ce faire, on commencera par exprimer la fonction φ_i pour i pair et sa dérivée en fonction de x et on utilisera deux changements de variable.



Avec un pas h constant:

$$\psi_i(x)=\frac{2(x-x_{i-1})(x-x_{i-1/2})}{hh} \text{ sur } [x_{i-1},x_i]$$

$$\psi_i(x)=\frac{2(x-x_{i+1})(x-x_{i+1/2})}{hh} \text{ sur } [x_i,x_{i+1}]$$

$x_{i-1/2} = x_{i-1} + h/2$ donc

$$\psi_i'(x)=\frac{2(x-x_{i-1/2})+2(x-x_{i-1})}{hh}=\frac{2u+2u-h}{hh}=\frac{4u-h}{hh} \text{ avec } u = x-x_{i-1} \text{ variant de 0 à h}$$

$x_{i+1/2} = x_i + h/2$ et $x_{i+1} = x_i + h$ donc

$$\psi_i'(x)=\frac{2(x-x_{i+1/2})+2(x-x_{i+1})}{hh}=\frac{2v-h+2v-2h}{hh}=\frac{4v-3h}{hh} \text{ avec } v = x-x_i \text{ variant de 0 à h}$$

$$A_{ii}=k\int_0^h\left(\frac{4u-h}{hh}\right)^2du+k\int_0^h\left(\frac{4v-3h}{hh}\right)^2dv=\frac{k}{h^4}\int_0^h\left((4u-h)^2+(4u-3h)^2\right)du$$

$$A_{ii}=\frac{k}{h^4}\int_0^h(32u^2-32uh+10h^2)du=\frac{k}{h^4}\left(\frac{32}{3}h^3-16h^3+10h^3\right)$$

$$A_{ii}=\frac{2k}{h}\left(\frac{16}{3}-3\right)=\frac{14k}{3h} \approx 4.666k/h \text{ pour i paire.}$$

6. Calculez A_{ii} pour i impair.

$$\varphi_i(x)=\psi_{i+1/2}(x)=\frac{-4(x-x_i)(x-x_{i+1})}{hh} \text{ sur } [x_i,x_{i+1}]$$

$$A_{ii\,(i\ impaire)}=\int_0^1 k\left(\varphi_i'\right)^2dx=\frac{16k}{h^4}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left((x-x_{i+1})+(x-x_i)\right)^2dx$$

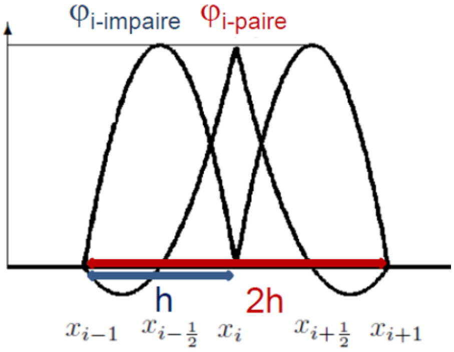
$$A_{ii\,(i\ impaire)}=\frac{16k}{h^4}\int_{x_i}^{x_{i+1}}\left(u-h+u\right)^2du=\frac{16k}{h^4}\int_0^h\left(2u-h\right)^2du \text{ avec } u=x-x_i=x-x_{i+1}+h$$

$$A_{ii\,(i\ impaire)}=\frac{16k}{h^4}\frac{1}{6}\left[\left(2u-h\right)^3\right]_0^h=\frac{16k}{h^4}\frac{1}{6}\left(h^3+h^3\right)=\frac{16k}{3h}\approx 5.333k/h$$

Pour i pair, on donne $M_{i,i} = 8h/30$, $M_{i,i+1} = 2h/30$ et $M_{i,i+2} = -h/30$.

7. Calculez les 3 coefficients $M_{i,i}$, $M_{i,i+1}$ et $M_{i,i+2}$ pour i impair.

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_i)(x-x_{i+1})}{(x_{i+\frac{1}{2}}-x_i)(x_{i+\frac{1}{2}}-x_{i+1})} & \text{si } x_i \le x \le x_{i+1}, \\ 0 & \text{si } x \le x_i \text{ ou } x \ge x_{i+1}. \end{cases}$$



Pour i impaire, $M_{ii} = \int_0^1 \varphi_i^2 dx = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \dfrac{(x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2}{h^4/16} dx = \dfrac{16}{h^4}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)^2(x-x_{i+1})^2 dx$

On pose $u = x - x_i$, $du = dx$ et $x_{i+1} = x_i + h$

$$M_{ii} = \frac{16}{h^4}\int_0^h u^2(u-h)^2 du = \frac{16}{h^4}\int_0^h u^2(u^2-2hu+h^2)du = \frac{16}{h^4}\int_0^h \left(u^4-2hu^3+h^2u^2\right)du$$

$$M_{ii} = \frac{16}{h^4}\left[\frac{u^5}{5} - h\frac{u^4}{2} + \frac{h^2u^3}{3}\right]_0^h = \frac{16}{h^4}\left[\frac{h^5}{5} - \frac{h^5}{2} + \frac{h^5}{3}\right] = 16h\left[\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right] = \frac{16h}{30}$$

$$M_{i,i+1} = M_{i+1,i} = M_{j,j-1} = \frac{2h}{30} = M_{j,j+1} \text{ avec j= i+1 pair}$$

et $M_{ii+2} = 0$ car φ_i n'a pas de support commun avec φ_{i+2} pour i impair

8. Ecrire l'allure de la matrice M et lui appliquer un mass lumping. Que vaut alors M^{-1} ?

Pour i paire, $M_{i,i} = \dfrac{8h}{30}$, $M_{i,i+1} = \dfrac{2h}{30}$ et $M_{i,i+2} = -\dfrac{h}{30}$

Pour i impaire, $M_{i,i} = \dfrac{16h}{30}$, $M_{i,i+1} = \dfrac{2h}{30}$ et $M_{i,i+2} = 0$

$$M = \frac{h}{30}\begin{pmatrix} \dots & \dots & & & & & & \\ 2 & 8 & 2 & -1 & & & & \\ 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & & & \\ & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 & & \\ & & 0 & 2 & 16 & 2 & 0 & \\ & & & -1 & 2 & 8 & 2 & -1 \\ & & & & & 2 & 16 & 2 \\ & & & & & & \dots & \dots \end{pmatrix} \approx \frac{h}{30}\begin{pmatrix} \dots & & & & & & \\ & 20 & & & & & \\ & & 10 & & & & \\ & & & 20 & & & \\ & & & & 10 & & \\ & & & & & 20 & \\ & & & & & & \dots \end{pmatrix} \text{ (mass lumping)}$$

$$M^{-1} = \frac{3}{2h}\begin{pmatrix} \dots & & & & & & & \\ & 2 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 2 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & 2 & & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \dots \end{pmatrix}$$