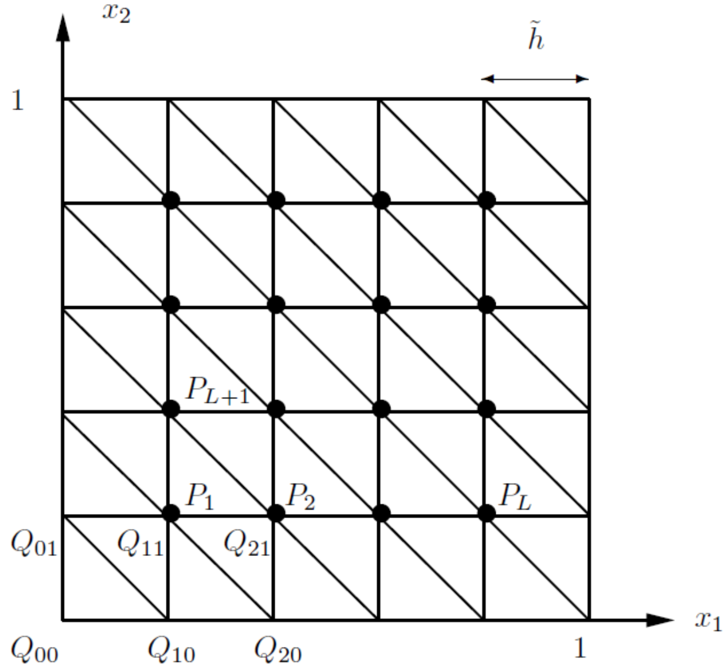
Problèmes elliptique et éléments finis 2D

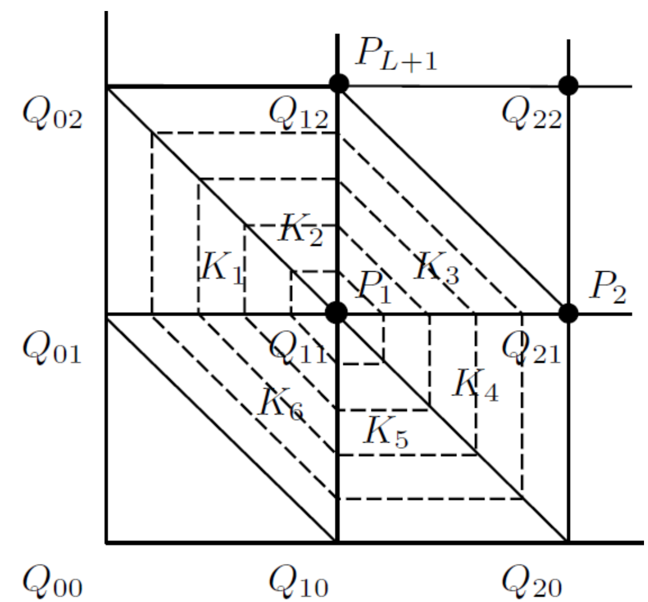
Exo4a: dans le cas L =4 (N = 16), montrer que

$A_{11} = A_{ii} = 4$ pour i = 1 à N

$$A_{ii} = \int_\Omega \left|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi_i(x)\right|^2 d\Omega$$

$$h = \tilde{h} = 1/5$$





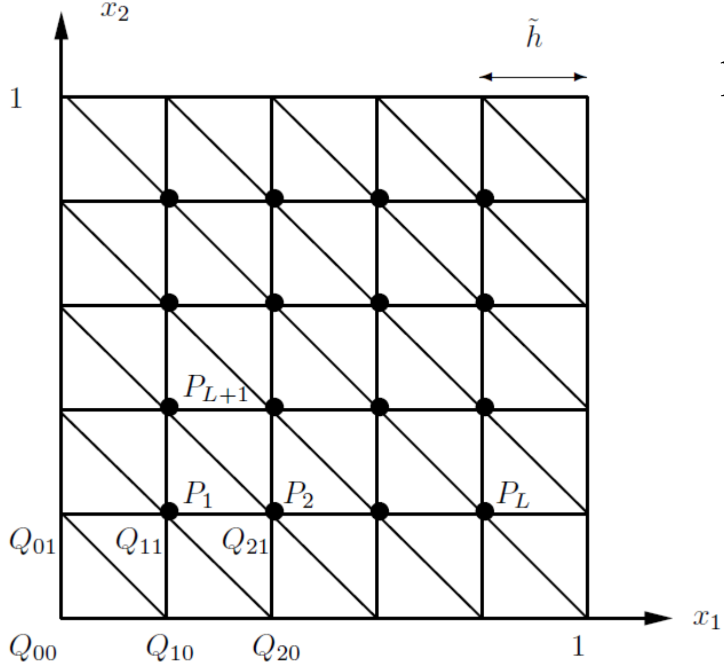
Exo4a Corrigé:

dans le cas L =4 (N = 16), montrer que $A_{11} = A_{ii} = 4$ pour i = 1 à N

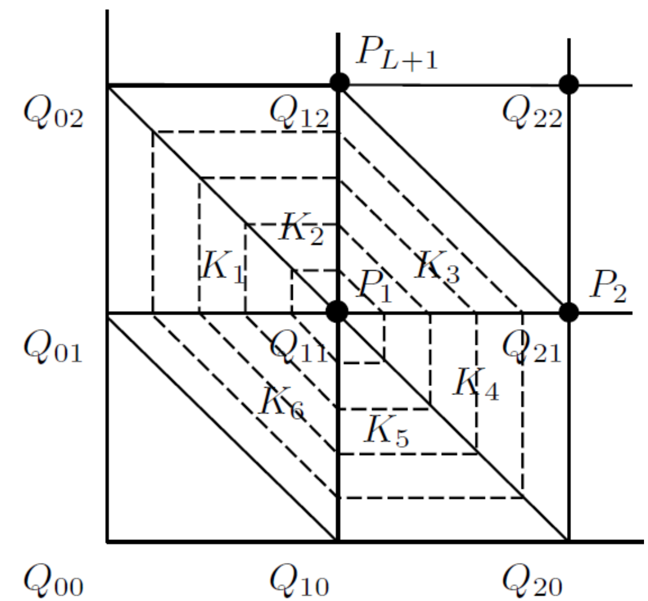
$$A_{11} = \int_\Omega \left|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x)\right|^2 d\Omega = \sum_{k=1}^{6} \int_{K_k} \left|\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x)\right|^2 d\Omega$$

$$A_{11} = \frac{1}{h^2}(1+1+1+1)\frac{h^2}{2} + \frac{1}{h^2}(2+2)\frac{h^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{4}{2} = 4$$

$A_{ii} = 4$ pour i = 1, N par transaltion en x et en y.



$h = \tilde{h} = 1/5$

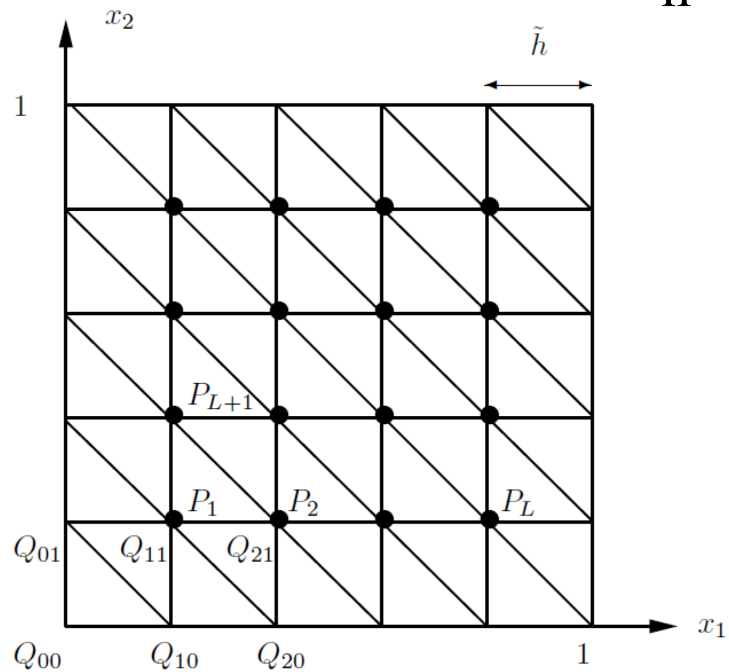


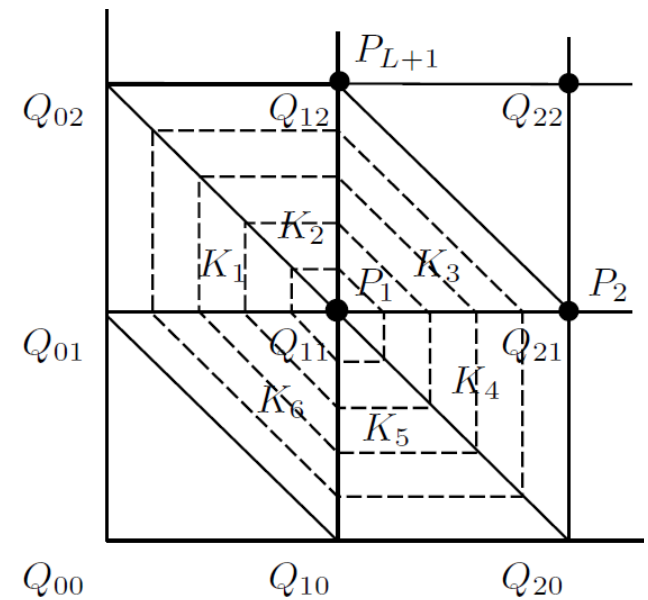
Problèmes elliptique et éléments finis 2D

Exo4b: dans le cas L =4 (N = 16), montrer que

$A_{12} = A_{21} = -1$
$A_{13} = A_{14} = 0$
$A_{15} = A_{51} = -1$
$A_{25} = A_{52} = 0$

$h = \tilde{h} = 1/5$



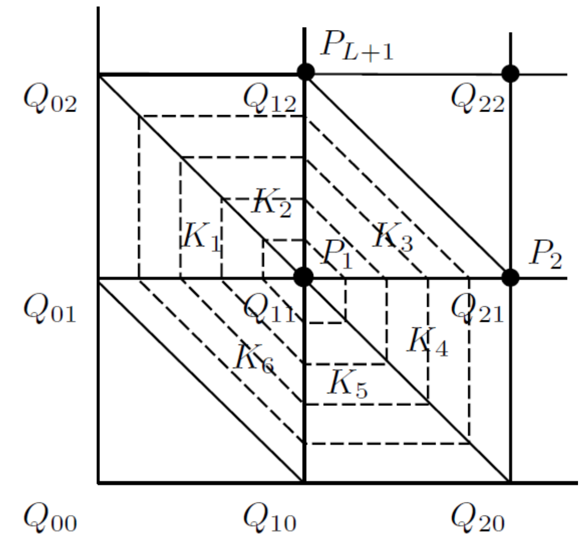


Corrigé exo 4b: calcul de A_{12} , A_{13} et A_{14} :

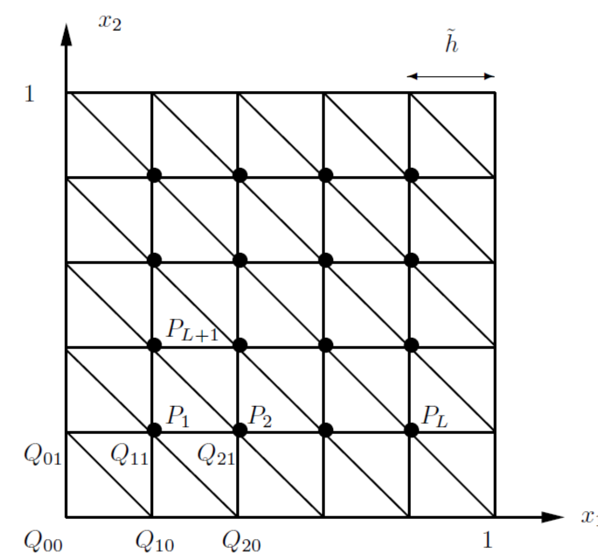
Intersection des supports de φ1 et φ2: triangles K3 et K4

$$A_{12} = \int_{K_3} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2(x)d\Omega + \int_{K_4} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2(x)d\Omega$$

$$A_{12} = \begin{pmatrix} -1/h \\ -1/h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/h \\ 0 \end{pmatrix}\frac{h^2}{2} + \begin{pmatrix} -1/h \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/h \\ 1/h \end{pmatrix}\frac{h^2}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$



$A_{13} = A_{14} = 0$ car l'intersection des supports des fonctions de base est vide.



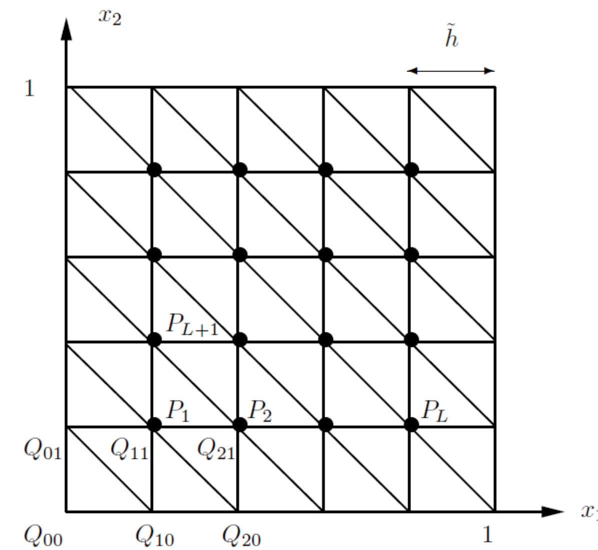
Corrigé exo 4b: calcul de A_{12} , A_{13} et A_{14} :

Calcul de $A_{15} = A_{1,L+1}$ avec L = 4

Intersection des supports de φ1 et φ5: triangles K2 et K3

$$A_{15} = \int_{K_2} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_5(x)d\Omega + \int_{K_3} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_1(x)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_5(x)d\Omega$$

$$A_{15} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/h \\ 1/h \end{pmatrix}\frac{h^2}{2} + \begin{pmatrix} -1/h \\ -1/h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \end{pmatrix}\frac{h^2}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

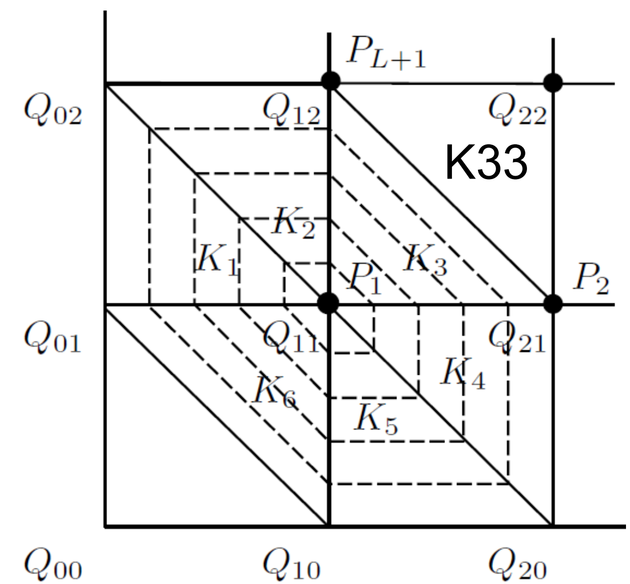


Calcul de $A_{25} = A_{2,L+1}$ avec L = 4

Intersection des supports de φ2 et φ5: triangles K2 et K33

$$A_{25} = \int_{K_3} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2(x)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_5(x)d\Omega + \int_{K_{33}} \overrightarrow{\text{grad}}\varphi_2(x)\overrightarrow{\text{grad}}\varphi_5(x)d\Omega$$

$$A_{25} = \begin{pmatrix} 1/h \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1/h \end{pmatrix}\frac{h^2}{2} + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/h \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1/h \\ 0 \end{pmatrix}\frac{h^2}{2} = 0$$



Problèmes elliptique et éléments finis 2D

$-\Delta u = f(x)$, éléments finis triangulaires de degré 1

Pour L = 4 (16 points intérieurs) la matrice carrée 16x16 A s'écrit:

$$A = \begin{bmatrix} B & C & & \\ C & B & C & \\ & C & B & C \\ & & C & B \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & \\ -1 & 4 & -1 & \\ & -1 & 4 & -1 \\ & & -1 & 4 \end{bmatrix} \text{ et } C = \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}.$$

La matrice carrée 16x16 A est nonadiagonale: sa largeur de bande est 9 mais comme elle est symétrique, sa demi-largeur de bande est 5.